Mathematik–Online:
Beiträge zu berühmten, gelösten und ungelösten Problemen

Nummer 1 - April 2008

Die Riemannsche Vermutung

von Jörg Brüdern

1. Primzahlen. Das Zählen gehört zu den archaischen Wurzeln der Mathematik. Die Eigenschaften der natürlichen Zahlen zu ergründen ist Gegenstand der Zahlentheorie, die eine mindestens bis in die Antike zurückreichende Geschichte hat. Die Multiplikation führt direkt zum Begriff der Primzahl: dies sind solche $p \in \mathbb{N}$, die genau zwei Teiler haben. Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ läßt sich als Produkt von Primzahlen schreiben, und dies gelingt von der Reihenfolge der Faktoren abgesehen auf genau eine Weise. In diesem Sinne sind die Primzahlen die Bausteine der Arithmetik. Zwar wußte schon Euklid, daß sich jenseits jeder vorgegebenen Grenze noch größere Primzahlen finden lassen, doch feinere Fragen zur Verteilung der Primzahlen sind heute meist noch offen und gehören zu den wichtigsten Herausforderungen für die Reine Mathematik. Auch die Riemannsche Vermutung, die in ihrer originalen Fassung zur komplexen Analysis gehört, läßt sich in diesem Kontext interpretieren. Dazu sollen Primzahlen gezählt werden; $\pi(x)$ bezeichne die Anzahl der Primzahlen p mit $p \leq x$. Gauß hat um 1800 für $\pi(x)$ das logarithmische Integral

$$\mathrm{li}\ (x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \Big) \frac{dt}{\log t}$$

als Approximation vorgeschlagen, deren Qualität durch den *Primzahlsatz*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}\ x} = 1 \tag{1}$$

eindrucksvoll bestätigt wird. Die Riemannsche Vermutung macht eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit in (1).

Riemannsche Vermutung, 1. Fassung. *Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $x \geq 2$ gilt*

$$|\pi(x) - \mathrm{li}\ x| \leq C\sqrt{x} \log x. \tag{2}$$

Die Differenz $\pi(x) - \mathrm{li}\ x$ oszilliert mit Ausschlägen der Größe $\sqrt{x}$, denn nach einer abgeschwächten Version eines Satzes von Littlewood gibt es eine unbeschränkte Folge $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ mit $(-1)^n(\pi(x_n) - \mathrm{li}\ x_n) > \mathrm{li}\ \sqrt{x_n}$. Die Riemannsche Vermutung besagt also, daß die Primzahlen in ihrer Anordnung nach der Größe so gleichmäßig wie möglich verteilt sind.

2. Die Zetafunktion. Die *Riemannsche Zetafunktion* ist in $\mathrm{Re}\, s > 1$ durch die absolut konvergente Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{3}$$

gegeben. Sie kann nach $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ analytisch fortgesetzt werden; bei $s = 1$ entsteht ein Pol erster Ordnung mit Residuum 1. Euler hatte dies im wesentlichen bereits gesehen und vor

1750 in $\mathrm{Re}\, s > 1$ die alternative Darstellung

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \tag{4}$$

mit einem über alle Primzahlen p erstreckten Produkt gefunden. Die aus (3) und (4) entstehende Identität ist eine analytische Fassung der eindeutigen Primfaktorzerlegung; $\zeta(s)$ speichert also wesentliche Informationen über die Primzahlen.

Bernhard Riemann veröffentlichte 1859 einen bahnbrechenden Aufsatz [11], der vierzig Jahre später zum Beweis des Primzahlsatzes durch Hadamard und de la Vallée-Poussin führen sollte. Riemann wendet konsequent die Methoden der damals noch jungen Funktionentheorie an. Er beginnt mit einer Funktionalgleichung für $\zeta(s)$; dem mit der Gammafunktion ([3, 10]) vertrauten Leser erschließt sich diese als die unter der Transformation $s \mapsto 1 - s$ invariante Funktion

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Dann analysiert Riemann die Konsequenzen des Produkts (4). Dieses wird logarithmiert und liefert dann in $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ die Integraldarstellung

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty x^{-s-1} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\pi(x^{1/k})dx.$$

Mit dem Fourierschen Umkehrsatz kann dies in eine Formel für $\pi(x)$ umgeschrieben werden, die ein Kurvenintegral über $\log \zeta(s)$ enthält. Letzteres berechnet Riemann mit dem Residuensatz und erhält daraus seine berühmte *explizite Formel*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\pi(x^{1/k}) = \mathrm{li}\ x - \sum_{\substack{\zeta(\varrho)=0 \\ \mathrm{Im}\,\varrho>0}} (\mathrm{li}\ x^\varrho + \mathrm{li}\ x^{1-\varrho}) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t^2-1)\log t} - \log 2. \tag{5}$$

Die Zetafunktion hat Nullstellen bei $s = -2, -4, -6, \ldots$; diese werden von der Funktionalgleichung erzwungen. Alle weiteren Nullstellen können nur im Streifen $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$ liegen, ferner sind mit ϱ auch $1 - \varrho$, $\overline{\varrho}$ und $1 - \overline{\varrho}$ Nullstellen von $\zeta(s)$. Auch dies sind Folgerungen der Funktionalgleichung. Ein Vergleich von (5) und (2) suggeriert sofort, daß alle Nullstellen in $\mathrm{Re}\,(s) \le \frac{1}{2}$ und deshalb (!) auf $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$ liegen sollten. In der Tat ist dies zu (2) äquivalent.

Riemannsche Vermutung, 2. Fassung. *Ist* $\varrho \in \mathbb{C}$ *mit* $0 \le \mathrm{Re}\, \varrho \le 1$ *und* $\zeta(\varrho) = 0$, *dann ist* $\mathrm{Re}\, \varrho = \frac{1}{2}$.

Riemann selbst beschreibt seine Vermutung mit der durch

$$\xi\Big(\frac{1}{2} + is\Big) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \tag{6}$$

definierten Funktion ξ, deren wesentlicher Anteil bereits im Zusammenhang mit der Funktionalgleichung erwähnt wurde. Die Transformation $s \mapsto \frac{1}{2} + is$ bildet die reelle Achse auf $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ ab. Riemann bestimmt dann zunächst die Anzahl $N(T)$ der Nullstellen von ξ mit $0 < \mathrm{Im}\, s < T$ in (6), was dasselbe ist wie die Nullstellen von ζ, und skizziert einen Beweis für die asymptotische Entwicklung

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + o(T).$$

Dann fährt er wörtlich fort:

“Man findet nun in der That etwa soviele reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig beiseite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.”

Diese Stelle und vor allem der erste Halbsatz sind oft interpretiert worden. Ist $N_0(T)$ die Anzahl der von $N(T)$ gezählten Nullstellen von $\zeta(s)$ mit $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, so scheint Riemann anzudeuten, daß ihm eine Begründung zumindest für $\lim_{T\to\infty} N_0(T)/N(T) = 1$ bekannt ist. Geht diese Lesart nicht zu weit, muß das Argument dazu als verloren gelten, zur Zeit liegt nur für

$$\liminf N_0(T)/N(T) \geq \frac{2}{5}$$

ein Beweis vor (Conrey [4]).

Die Funktion $\zeta(t)$ ist für reelle Werte von t reell und läßt sich recht leicht numerisch so weit berechnen, daß das Vorzeichen sicher bekannt ist. Zwischen Vorzeichenwechseln liegt eine Nullstelle, was zu unteren Schranken für $N_0(T)$ führt. Andererseits läßt sich $N(T)$ als Kurvenintegral schreiben, dieses kann numerisch geschätzt und wegen $N(T) \in \mathbb{N}$ sogar exakt berechnet werden. Ergibt sich $N_0(T) \geq N(T)$, dann ist $N_0(T) = N(T)$, und es gilt $\operatorname{Re} \varrho = \frac{1}{2}$ für alle Nullstellen von $\zeta(s)$ mit $0 < |\operatorname{Im} \varrho| \leq T$. Auf diesem Wege wurde festgestellt, daß die ersten $1,5 \times 10^9$ Nullstellen von $\zeta(s)$ auf $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ liegen ([9]).

3. Wirkungen. Bisherigen Angriffen hat die Riemannsche Vermutung widerstanden. Dennoch hat sie die Entwicklung der Zahlentheorie auf zweierlei Weise dauerhaft geprägt. Einerseits sind in der analytischen Zahlentheorie vor allem in der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts Methoden entwickelt worden, die die Riemannsche Vermutung weitgehend entbehrlich machen. Nur ein Beispiel mag dies illustrieren: (2) entnimmt man sofort, daß es in jedem Intervall $[x, x + 2C\sqrt{x}\log x]$ viele Primzahlen geben muß. Zwar haben wir davon noch keinen von der Riemannschen Vermutung unabhängigen Beweis, doch Baker, Harman und Pintz [1] konnten in jedem Intervall $[x, x + x^{0{,}525}]$ Primzahlen finden. In vielen anderen Fällen können sogar die Folgerungen aus der Riemannschen Vermutung in ihrer Gänze von derselben unabhängig verifiziert werden.

Vielleicht noch bedeutender ist das von Riemann erstmals analysierte Wechselspiel zwischen einem Zählprozess, hier für die Primzahlen, und den Nullstellen einer geeigneten erzeugenden Funktion, hier $\zeta(s)$. In einem recht präzisen Sinne herrscht zwischen den Primzahlen und den Nullstellen von $\zeta(s)$ eine Dualität, die in der expliziten Formel (5) zum Ausdruck kommt. Für andere Zählprozesse wurden entsprechende Ansätze verfolgt. Gelegentlich konnten die sich dann aufdrängenden Analogien zur Riemannschen Vermutung sogar bewiesen werden. Eine sorgfältige Diskussion nur eines Beispiels würde hier zu weit führen. Zu Polynomen $F \in \mathbb{Z}[x, y]$ und einer Primzahl p kann die Kurve $F(x, y) \equiv 0 \bmod p$ betrachtet werden. Dazu läßt sich eine Zetafunktion assozieren, die ähnlich wie die Riemannsche Zetafunktion eine Funktionalgleichung hat. Das Analogon zur Riemannschen Vermutung wurde zuerst von Hasse [7] für elliptische Kurven und dann allgemein von Weil [13] bewiesen. Aber auch zu einer allgemeinen diophantischen Gleichung $F(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ mit einem Polynom $F \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ läßt sich eine Zetafunktion konstruieren, die die rationalen Lösungen der Gleichung kodiert. Hier ist die Mathematik von einer Übersicht über die Nullstellenverteilung noch weit entfernt, aber ähnlich wie bei der Riemannschen Zetafunktion kann zunächst versucht werden, die Konsequenzen eines Analogons zur Riemannschen Vermutung zu formulieren; auch in dieser Situation gelingen häufig im Anschluß unabhängige Beweise der so aufgefundenen Theoreme. Das Verfahren ist nicht auf die Zahlentheorie beschränkt, sondern findet in vielen Zweigen der Mathematik Anwendung. Dafür muß auf weiterführende Literatur verwiesen werden.

4. Literatur. Riemanns Originalarbeit [11] ist eine auch heute noch sehr empfehlenswerte Quelle. Funktionalgleichung, explizite Formel und Primzahlsatz finden sich in vielen Lehrbüchern zur analytischen Zahlentheorie, u. a. in Brüdern [3] und Davenport [5], historische Kommentare dazu vor allem bei Edwards [6]. Ausführlich wird die Zetafunktion bei Titchmarsh [12], Ivic [8] und Patterson [10] behandelt. Bombieri [2] diskutiert die Riemannsche Vermutung aus ähnlicher Perspektive wie diese kurze Problemskizze, führt den Leser aber weiter. Die dort angegebene Literatur kann als Einstieg in die aktuelle Forschung dienen.

Literatur

[1] R. C. Baker, G. Harman, J. Pintz, *The difference between consecutive primes.* II. Proc. London Math. Soc. (3) 83 (2001), 532–562.

[2] E. Bombieri, *The Riemann hypothesis. The millenium prize problems,* 107–124, Clay Math. Inst., Cambridge MA, 2006.

[3] J. Brüdern, *Einführung in die analytische Zahlentheorie.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1995.

[4] B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line.* J. reine angew. Math. 399 (1989), 1–26.

[5] H. Davenport, *Multiplicative number theory.* 2^{nd} ed. Springer, New York 1980.

[6] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta function.* Academic Press, New York 1974.

[7] H. Hasse, *Über die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern.* Comptes rendus d. Cong. Int. des Math. Oslo 1936, Tome 1. Broggers, Oslo 1937, 189–206.

[8] A. Ivic, *The Riemann zeta function – The theory of the Riemann zeta function with applications.* John Wiley, New York 1985.

[9] J. van de Lune, J. J. te Riele, D. T. Winter, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip, IV.* Math. of Comp. 46 (1986), 667–681.

[10] S. J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann zeta function.* University Press, Cambridge 1988.

[11] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Monatsb. der Berliner Akad. 1858/60, 671–680.

[12] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function.* 2nd ed. revised by D. R. Heath-Brown. Oxford Univ. Press, Oxford 1986.

[13] A. Weil, *Sur les courbes algébrique et les variétés qui s'en déduisent.* Herman & Cie, Paris 1948.

Autor:
Prof. Dr. Jörg Brüdern
IAZ, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart, D-70550 Stuttgart
bruedern@mathematik.uni-stuttgart.de