Mathematik–Online:
Beiträge zu berühmten, gelösten und ungelösten Problemen

Nummer 4 - Dezember 2008

Zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen

von Wolfgang Kimmerle

Es gibt kaum ein anderes Resultat in der Mathematik, welches so umstritten ist, wie der Klassifikationssatz der endlichen einfachen Gruppen. Dies und die Tatsache, dass zahlreiche Theoreme - nicht nur in der Gruppentheorie - scheinbar nur mit der Klassifikation zu beweisen sind, stellt andererseits eine einzigartige Faszination und Herausforderung dar, sich mit ihr auseinanderzusetzen.

In der Theorie der endlichen Gruppen spielen einfache Gruppen deswegen eine herausragende Rolle, da sie nach dem Satz von Jordan - Hölder als „atomare "Bausteine einer endlichen Gruppe betrachtet werden dürfen. Etwas präziser gesagt setzt sich eine endliche Gruppe aus eindeutig bestimmten Kompositionsfaktoren zusammen. Diese Kompositionsfaktoren sind einfache Gruppen. Beispielsweise bestehen symmetrische Gruppen vom Grad n aus einer alternierenden Gruppe vom Grad n und einem zur zyklischen Gruppe C_2 isomorphen Kompositionsfakor.

Die einfachen endlichen Gruppen gelten seit ca. 1980 als bekannt. Das AMS - Summer Institute on Finite Group Theory an der University of California in Santa Cruz 25.6.-20.7.1979 [10] darf man als Vorbote der Klassifikation bezeichnen - wurde doch spätestens hier deutlich, dass eine Klassifikation greifbar ist, ja dass sie unmittelbar bevorstand. A priori war es überhaupt nicht klar, ob sich die endlichen einfachen Gruppen dem nicht entziehen würden. In der Mathematik ist nicht alles klassifizierbar. Es ist wohl insbesondere Daniel Gorenstein, seinem Beharrungsvermögen und seiner Intuition zu verdanken, dass das Programm der Klassifikation erfolgreich mit einer vollständigen Liste der endlichen einfachen Gruppen ein Ende gefunden hat und dadurch zu einem Hauptergebnis geworden ist, welches die Mathematik im letzten Jahrhundert erzielen konnte. Ich kenne keinen Gruppentheoretiker, der heutzutage an der Vollständigkeit dieser Liste zweifelt. Gezweifelt bzw. verzweifelt wird in anderer Hinsicht, doch hierzu später. Zuerst soll die Liste beschrieben werden.

1 Die Liste

Es hat sich eingebürgert, die folgende Grobunterteilung vorzunehmen.

Satz 1.1 *Eine endliche einfache Gruppe ist isomorph zu einer der folgenden Gruppen:*

- *Zyklische Gruppen C_p von Primzahlordnung p.*
- *Alternierende Gruppen A_n vom Grad $n \geq 5$.*

- *Einfache Gruppen vom Lie-Typ.*
- *Die 26 einfachen sporadischen Gruppen.*

Dass es bis auf Isomorphie nur eine endliche Gruppe von Primzahlordnung gibt, lernt man im ersten Semester eines Mathematikstudiums, und etwas später in einer ersten Algebravorlesung wird gezeigt, dass die alternierenden Gruppen vom Grad größer 4 einfach nicht abelsch sind.

Die 26 einfachen sporadischen Gruppen, im folgenden kurz sporadische Gruppen genannt, sind rasch aufgezählt. Weitaus schwieriger ist es, diese zu definieren und - dies war ein Hauptproblem der letzten Phase der Klassfikation - ihre Existenz und Eindeutigkeit zu beweisen. Um 1900 waren die fünf einfachen Mathieugruppen bekannt, die sich als Automorphismengruppen kombinatorischer Objekte, sogenannter Blockdesigns bzw. Steinersysteme, beschreiben lassen. Erst 1966 wurde die nächste sporadische Gruppe entdeckt, die erste Jankogruppe J_1 [14]. Nach diesem Meilenstein folgten bis ca. 1980 die restlichen 20 sporadischen Gruppen bis hin zur größten, dem sogenannten Monster[1] M, dessen Existenz von B.Fischer sehr präzise vorausgesagt und von R.Griess letztlich bewiesen wurde.

Von einigen sporadischen Gruppen ist nicht viel mehr bekannt als ihre gewöhnliche Charaktertafel und Eigenschaften, die aus der Charaktertafel resultieren. Keine der sporadischen Gruppen ist zu einer alternierenden Gruppe oder zu einer Gruppe vom Lietyp isomorph.

Den weitaus größten Teil der endlichen einfachen Gruppen stellen jene vom Lietyp dar. Ihre Unterteilung und Bezeichnung ist nicht einheitlich. Dies ist teilweise historisch bedingt. Man unterscheidet zwischen klassischen und nicht-klassischen, zwischen exceptionellen und nicht-exceptionellen sowie zwischen ungetwisteten und getwisteten Typen. Die klassischen sind jene, die schon seit Ende des 19.Jahrhunderts bekannt sind. Sie leiten sich ab aus Automorphismengruppen von Vektorräumen mit und ohne Skalarprodukt. Grob gesagt bestehen die klassischen Gruppen aus

- linearen Gruppen
- unitären Gruppen
- symplektischen Gruppen
- orthogonalen Gruppen

Am leichtesten zu verstehen sind hierbei die von den linearen Gruppen, also den Automorphismen eines Vektorraums über einem Körper K abstammenden speziellen projektiven Gruppen $\mathrm{PSL}(n, K)$. Sie sind der Quotient der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}(n, K)$ nach ihrem Zentrum und aus der projektiven Geometrie gut bekannt. Die Gruppen $\mathrm{PSL}(n, K)$ sind einfach, ausgenommen für $n = 2$ die Fälle $|K| = 2$ und $|K| = 3$, also auch wenn der Körper K unendlich viele Elemente hat. Die klassischen Gruppen liefern somit auch wichtige Serien von einfachen Gruppen unendlicher Ordnung. Ist der Körper K endlich, $|K| = q$ ist dann eine Primzahlpotenz und es gibt bis auf Isomorphie genau einen solchen endlichen Körper, ergibt sich für jede Dimension n und jede Primzahlpotenz q (für $n = 2$ ist $q \geq 5$) eine endliche einfache Gruppe, die man häufig mit $\mathrm{PSL}(n, q)$ bezeichnet. Man erhält also eine unendliche von zwei Parametern abhängige Serie von einfachen Gruppen.

[1] Das Monster M wird auch friendly giant"FG genannt, F für Fischer, G für Griess.

2 Von Liealgebren zu einfachen Gruppen vom Lietyp

Eine einheitliche Beschreibung der Gruppen vom Lietyp erhält man überraschenderweise aus einer anderen Ecke der Algebra, aus der Theorie der Liealgebren.

Die einfachen endlich dimensionalen komplexen Liealgebren werden durch Dynkindiagramme klassifiziert (E. Cartan, Killing). Eine solche Liealgebra L besitzt eine Basis bezüglich der die Strukturkonstanten in $\mathbb{Z}$ liegen. Man nennt so eine Basis eine Chevalleybasis von L. Durch Koeffizientenerweiterung (also durch Tensorieren) des von B erzeugten Lie - Teilringes kann man dann kanonisch zu jedem Körper K eine Liealgebra L_K konstruieren. Ist K endlich, so führt das Studium von Automorphismen dieser Liealgebra L_K eindeutig zu einer endlichen Gruppe, die somit dem zu L gehörigen Dynkindiagramm Δ zugeordnet werden kann. Ist $|K| = q$ und n die Anzahl der Ecken des Dynkindiagramms so wird die erhaltene Gruppe mit $\Delta_n(q)$ bezeichnet. Bis auf ganz wenige Ausnahmen ist die so erhaltene Gruppe einfach.

Exemplarisch skizzieren wir diese Konstruktion bei der zum Dynkindiagramm A_1 gehörigen komplexen Liealgebra $L = A_1(\mathbb{C})$, die aus den komplexen 2×2 - Matrizen mit Spur 0 besteht und deren Lieklammer durch $[A, B] := AB - BA$ gegeben ist. Eine Chevalleybasis ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L_K ist dann gerade die Liealgebra über dem Körper K, die aus den 2×2 - Matrizen über K mit Spur 0 besteht. L_K besitzt Automorphismen[2] , die durch Konjugation mit den Matrizen

$$M_s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } M_t := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, wobei s, t beliebige Elemente von K sind

Bezeichne $A_1(K)$ die von diesen Konjugationen erzeugte Untergruppe der Automorphismengruppe von L_K. Da $\mathrm{SL}(2, K) \; = < M_s, M_t; s, t, \in K >$ erhält man einen offensichtlichen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{SL}(2, K)$ auf A_K, dessen Kern gerade aus dem Zentrum von $\mathrm{SL}(2, K)$ besteht. Also ist $A_1(K) \cong \mathrm{PSL}(2, K)$. Analog ergibt sich die Isomorphie von $A_n(q)$ mit $\mathrm{PSL}(n + 1, q)$

Insgesamt ergeben sich die folgenden Serien von ungetwisteten einfachen Grupen vom Lie - Typ.

Satz 2.1 *Die nicht getwisteten einfachen Gruppen vom Lie-Typ bestehen aus den folgenden Serien*

(i) $A_n(q)$ $(n, q) \neq (1, 2), (1, 3)$, $B_n(q)$ $(n, q) \neq (2, 2)$, $C_n(q)$ $(n \geq 3)$, $D_n(q)$ $(n \geq 4)$

(ii) $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, $G_2(q) (q > 2)$

Die Gruppen in (ii) nennt man exceptionell, da sie zu den exceptionellen Dynkindiagrammen gehören. Für die Fälle, in denen $\Delta_n(q)$ nicht einfach ist, gilt:

$$A_1(2) \cong S_3, A_1(3) \cong A_4, B_2(2) \cong S_6, G_2(2)' \cong {}^2A_2(3^2) .$$

[2]Die Konstruktion dieser Automorphismen erfolgt mit Hilfe nilpotenter Derivationen und der Matrixexponentialfunktion, siehe [6]

Hierbei bezeichnet S_n die symmetrische Gruppe vom Grad n und ${}^2A_2(3^2)$ ist eine unitäre Gruppe, die bei den getwisteten Gruppen vom Lietyp auftaucht. Ferner bestehen nur die folgenden Isomorphismen zu alternierenden Gruppen A_n bzw. zwischen einfachen Gruppen vom Lietyp.

$$A_1(4) \cong A_5 \cong A_1(5),\ A_1(7) \cong A_2(2),\ A_1(9) \cong A_6, A_3(2) \cong A_8,\ B_2(3) \cong {}^2A_3(2^2),$$

wobei die letztere wiederum eine unitäre Gruppe ist. Die nicht exceptionenellen Gruppen sind klassische Gruppen. $B_n(q)$ und $D_n(q)$ kommen von orthogonalen Gruppen, während $C_n(q)$ von symplektischen Gruppen abstammt.

Die Dynkindiagramme A_n für $n \geq 2$, D_n für $n \geq 5$, E_6 besitzen genau einen Graphautomorphismus γ der Ordnung 2. D_4 besitzt S_3 als Graphautomorphismengruppe und somit Graphautomorphismen der Ordnung 2 und 3. Graphautomorphismen und Körperautomorphismen des zu Grunde liegenden Körpers K induzieren Gruppenautomorphismen von $\Delta_n(q)$, die der Einfachheit halber auch Graph- bzw. Körperautomorphismus genannt werden und gleich bezeichnet werden.

Besitzt der Körper einen Automorphismus σ der Ordnung 2 oder 3, so kann man zeigen, dass die Fixpunkte des Automorphismus von $\Delta_n(q)$, der vom Produkt von γ und σ gebildet wird, eine Gruppe bilden, die wiederum bis auf ganz wenige Ausnahmen einfach ist. Die so entstehenden Serien von einfachen Gruppen hängen nur von der Ordnung k von γ und dem Dynkindiagramm Δ ab und werden mit ${}^k\Delta_n(q^k)$ bezeichnet. Die Serien ${}^2A_n(q^2)$ bzw. ${}^2D_n(q^2)$ stammen von unitären Gruppen bzw. von orthogonalen Gruppen ab, und stellen die bislang noch fehlenden klassischen Gruppen dar. Die Gruppen ${}^2D_n(q^2)$ und ${}^3D_4(q^3)$ wurden von R.Steinberg entdeckt. Sie sind nicht klassisch.

Besitzt der zu Grunde liegende Körper die Charakteristik 2 bzw. 3, so kann man die Pfeile in den Dynkindiagrammen von B_2, G_2 und F_4 vernachlässigen und erhält dann Graphautomorphismen der Ordnung 2. Unter dieser Voraussetzung an den Körper induzieren diese Graphautomorphismen analog wie im vorigen Abschnitt Gruppenautomorphismen von $\Delta_n(q)$, $\Delta = B_2, G_2, F_4$. Das Quadrat dieses Graphautomorphismus γ stimmt mit dem Quadrat des Körperautomorphismus[3] $x \mapsto x^p, p = 2$ bzw. $p = 3$ überein. Ein endlicher Körper der Charakteristik 2 bzw. 3 besitzt genau dann einen Körperautomorphismus σ, dessen Quadrat mit dem Frobeniusautomorphismus übereinstimmt, wenn der Körper 2^{2m+1} bzw. $3^{2m+1}, m \in \mathbb{N}_0$ Elemente besitzt. Analog wie im vorigen Abschnitt erhält man als Fixpunkte des Produkts $\sigma \circ \gamma$ eine endliche Gruppe, die fast immer einfach ist. Die entstehenden Serien werden mit ${}^2\Delta_n(p^{2m+1}), p =$ Charakteristik von K, bezeichnet.

Satz 2.2 *Die getwisteten einfachen Gruppen vom Lie-Typ bestehen aus den folgenden Gruppen*

(i) ${}^2A_n(q^2)$ $(n, q) \neq (2, 2)$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2E_6(q^2)$.

(ii) ${}^2B_2(2^{2m+1})$ $(m \geq 1)$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ $(m \geq 1)$, $T := {}^2F_4(2)'$, ${}^3G_2(3^{2m+1})$ $(m \geq 1)$

Die Gruppe ${}^2A_2(2^2)$ ist auflösbar von der Ordnung 72 und ${}^2A_3(2^2)$ ist isomorph zu $B_2(3)$, wie bereits oben vermerkt.

[3] Diesen Körperautomorphismus nennt man den Frobeniusautomorphismus von K. Ist K endlich, so erzeugt dieser Aut$K$.

Die Serien in (ii) wurden von R. Ree ($^2F_4, {}^3G_2$) bzw. M. Suzuki ($^2B_2$) entdeckt und werden auch häufig Ree- bzw. Suzukigruppen genannt. Die Gruppe $^2B_2(2)$ ist auflösbar von der Ordnung 20, die Kommutatoruntergruppen von $^2F_4(2)$ bzw. $^3G_2(3)$ sind einfach. $^3G_2(3)'$ ist isomorph zu $A_1(8)$, während $^2F_4(2)'$ eine einfache Gruppe ist, die zu keiner anderen einfachen Gruppe vom Lietyp, zu keiner alternierenden Gruppe und zu keiner sporadischen Gruppe isomorph ist. Man nennt sie die Titsgruppe T.

3 Bemerkungen zum Beweis und zu Teilklassifikationen

Umstritten ist der Klassifikationssatz hauptsächlich wegen der unglaublichen Länge des Beweises. Sicher ist, dass der vorliegende Beweis unbefriedigend ist, dass er verbessert werden muss und verbessern darf man hier auch durchaus im Sinn von Ausbessern verstehen. Im folgenden sollen historisch nur die ersten Schritte des Beweises dargelegt werden.

Im Grunde beginnt die Klassifikation mit dem Satz von W. Feit und J. Thompson, dass Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind [8]. Daher ist eine einfache nichtabelsche Gruppe von gerader Ordnung und besitzt somit Involutionen. Das folgende Resultat von Brauer und Fowler erlaubt es dann einfache Gruppen nach dem Zentralisator einer Involution zu klassifizieren.

Satz 3.1 *Es gibt nur endlich viele endliche Gruppen gerader Ordnung, in denen der Zentralisator einer Involution isomorph zu einer vorgegebenen Gruppe H ist.*

Viele einfache Gruppen lassen sich durch den Zentralisator einer Involution charakterisieren. Dies ist nicht möglich durch Vorgabe des Isomorphietyps einer 2 - Sylowgruppe, z.B. gibt es unendlich viele einfache Gruppen deren 2 - Sylowgruppe isomorph zur Kleinschen Vierergruppe $C_2 \times C_2$ ist. Dennoch liefert die Klassifikation nach 2-Sylowgruppe durchaus wertvolle Teilresultate. Die 2 - Sylowgruppe einer einfachen nichtabelschen Gruppe ist niemals zyklisch, sie ist nach R. Brauer und M. Suzuki [5] auch nicht isomorph zu einer Quaternionengruppe oder einer verallgemeinerten Quaternionengruppe. Mit Hilfe von

Satz 3.2 *(Glaubermans Z*-Theorem) [9] Sei G eine endliche Gruppe, die keinen Normalteiler ungerader Ordnung besitzt. Sei S eine 2 - Sylowgruppe von G und $t \in S$. Dann ist t genau dann im Zentrum $Z(G)$, wenn die Konjugiertenklasse von t mit S nur $\{t\}$ als Schnitt besitzt.*

erhält man dann sogar, dass eine einfache endliche Gruppe keine direkten Produkte aus verallgemeinerten Quaternionengruppen und zyklischen Gruppen als 2 - Sylowgruppe besitzen kann. Ein Beweis vom Z^* - Theorem ist bis heute nur mit Hilfe der modularen Darstellungstheorie gelungen. Die analoge Aussage für ungerade Primzahlen p, das sogenannte Z_p* - Theorem, lässt sich bis heute nur mit Hilfe der Klassifikation verifizieren.

Eine Untergruppe H einer endlichen Gruppe G nennt man p - lokal, wenn sie Normalisator einer nicht-trivialen p-Untergruppe P von G ist, also wenn $N_G(P) = H$ ist. Dass die Struktur p - lokaler Untergruppen in Zusammenhang mit der Struktur von G steht, sieht man bereits in der Verlagerungstheorie. In dieser versucht man einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus in die Kommutatorfaktorgruppe einer Untergruppe (in den meisten Fällen betrachtet man p - Sylowgruppen) zu konstruieren. Entscheidend ist nicht nur der Isomorphietyp der Untergruppe, sondern auch die Art und Weise wie sie in G eingebettet ist. Man nennt eine echte Untergruppe H stark p - eingebettet in G, wenn $p \in \pi(H)$ ist, aber p die Ordnung von $H \cap H^g$ für alle $g \in G \setminus H$ nicht teilt. Beispielsweise ist die 2 - Sylowgruppe einer $A_5 \cong A_1(2^2)$ stark 2 - eingebettet in A_5. Gruppen, die eine stark 2 - eingebettete Untergruppe besitzen, wurden von H. Bender klassifiziert. Es gilt insbesondere:

Satz 3.3 *[3] Ist G eine einfache Gruppe mit einer stark 2 - eingebetteten Untergruppe, dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen*

$$A_1(2^f);\ {}^2B_2(2^{2f-1});\ {}^2A_2(2^{2f});\quad \textit{jeweils für } f \geq 2.$$

Einfache Gruppen, deren p -lokale Untergruppen für alle $p \in \pi(G)$ auflösbar sind[4], wurden von J.Thompson klassifiziert.

Satz 3.4 *[20]*

$$A_1(q),\ q > 3;\ {}^2B_2(2^{n+1}),\ n \geq 1\ ;\ A_7;\ M_{11};\ A_2(3);\ {}^2A_2(3^2),\ {}^2F_4(2)'.$$

Die Liste von J. Thompson beinhaltet insbesondere sämtliche minimale einfachen Gruppen, also jene einfachen Gruppen, deren sämtliche echten Untergruppen auflösbar sind. Dies sind

$$A_1(p),\ p \geq 5 \text{ und } \ p^2 - 1 \not\equiv 0 \mod 5;\quad A_1(2^p)\ ;\quad A_1(3^p)\ p \geq 3;$$
$${}^2B_2(2^p),\ p \geq 3\ ;\quad A_2(3).$$

Hierbei bezeichnet p jeweils eine Primzahl.

Um die eingangs dieses Abschnitts angesprochene Länge des Klassfikationssatz zu verdeutlichen, soll explizit erwähnt werden, dass der Beweis von Satz 3.4 zusammen 410 Journalseiten umfasst. Addiert man noch die Seiten des Odd Order Papers [8] hinzu, ist man schon bei 664 angelangt und hat dann doch erst die Strecke bis zur Klassifikation der N - Gruppen hinter sich gebracht.

4 Einige Anwendungen

Viele Sätze und Aussagen der Theorie der endlichen Gruppen lassen sich bis heute nur mit Hilfe der Klassifikation beweisen.

Zu erwähnen sind hier etwa die Schreiersche Vermutung, die besagt, dass die äußere Automorphismengruppe einer endlichen einfachen Gruppe auflösbar ist oder die Klassifikation der zweifach transitiven Gruppen.

[4] Solche Gruppen nennt man N - Gruppen

Auch die Tatsache, dass eine endliche einfache nichtabelsche Gruppe stets von zwei Elementen erzeugt ist, lässt sich bislang nur so beweisen, dass man dies für alle Gruppen der Liste Serie für Serie, Stück für Stück verifiziert. Es ist typisch, dass die Klassifikation oft keinerlei Aufschluss darüber gibt, warum dieses oder jenes Resultat gelten sollte. Auch dass einfache Gruppen sich in der Regel durch ihre Ordnung unterscheiden, ist ein solches Beispiel. Genauer gilt

Satz 4.1 *[15] Seien G und H einfache endliche Gruppen gleicher Ordnung. Dann ist $G \cong H$ oder es gilt*

$$\{G, H\} = \{B_n(q), C_n(q)\} \ q \ \textit{ungerade}, n \geq 3 \quad \textit{bzw.} \ \{G, H\} = \{A_2(4), A_8\}$$

Im restlichen Abschnitt sollen exemplarisch Anwendungen in der arithmetischen Gruppentheorie betrachtet werden.

Unter dem Gruenberg-Kegel Graphen $\Pi(G)$ einer endlichen Gruppe versteht man jenen ungerichteten und schlaufenfreien Graphen, dessen Eckenmenge aus der Menge $\pi(G)$ der Primteiler von $|G|$ besteht. Zwei Ecken p und q werden genau dann mit einer Kante verbunden, wenn es in G ein Element der Ordnung $p \cdot q$ gibt. Die Struktur jener Gruppen G, für die $\Pi(G)$ mehr als eine Zusammenhangskomponente besitzt, wurde im wesentlichen von K.Gruenberg und O.Kegel bestimmt. Unter Verwendung von Resultaten aus der Klassifikation, insbesondere unter Verwendung der Schreierschen Vermutung, lässt sich ihr Resultat folgendermaßen formulieren.

Satz 4.2 *[22] Sei G eine endliche Gruppe und bezeichne $|\Pi(G)|$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten ihres Gruenberg - Kegel Graphen. Dann gilt:*

a) Ist G auflösbar, dann ist $|\Pi(G)| \leq 2$. Es ist $|\Pi(G)| = 2$ genau dann, wenn G eine Frobeniusgruppe oder eine 2 - Frobeniusgruppe ist. [5]

b) Ist $|\Pi(G)| \geq 2$ und G nicht auflösbar und keine Frobeniusgruppe, dann besitzt G genau einen einfachen nicht-abelschen Kompositionsfaktor S mit Multiplizität 1. Es ist $|\Pi(S)| \geq 2$ und G besitzt eine Normalreihe

$$1 < N < M < G$$

mit N nilpotent, $M/N \cong S$ und G/M ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Out}S$ und daher auflösbar.
Bezeichnet π_0 die Zusammenhangskomponente, in der 2 enthalten ist, so ist $\pi(N) \subset \pi_0$ und $\pi(G/N) \subset \pi_0$.

Die einfachen Gruppen mit nicht zusammenhängendem Primgraph wurden von J. S. Williams und A. S. Kondratiev klassifiziert [22], [16]. Es ergibt sich das überraschende Resultat, dass endliche Gruppen nie mehr als 6 Primgraphkomponenten besitzen und dass es nur eine einzige einfache Gruppe G mit $|\Pi(G)| = 6$ gibt, die Jankogruppe J_4. Man beachte, dass man $\Pi(G)$ auch für unendliche Gruppen definieren kann, die Vertices bestehen dann aus jenen Primzahlen, die die Ordnung eines Torsionselementes von G teilen.

[5] Auch für nicht auflösbare Frobeniusgruppen ist $|\Pi(G)| = 2$.

Wie man leicht sieht, gibt es bei unendlichen Gruppen keinerlei Beschränkungen an die Zahl der Zusammenhangskomponenten. In [19] wurden Teile von Satz 4.2 allein mit Hilfe der Methoden aus dem Oddorderpaper [8] von Feit und Thompson bewiesen. Dies unterstreicht den Zusammenhang der arithmetischen Struktur einer Gruppe mit der Frage nach ihrer Auflösbarkeit.

In den letzten Jahren wurde mit Hilfe der Klassifikation versucht arithmetische Charakterisierungen von Gruppen - überwiegend von einfachen Gruppen zu gewinnen. Quasi als pars pro toto sollen hier folgende Fragestellungen vorgestellt werden.

Vermutung 4.3 *(Thompson 1994) [7]. Für eine endliche Gruppe G bezeichne $cl(G)$ die Menge der Klassenlängen. Ist S eine einfache endliche Gruppe und X irgendeine endliche Gruppe mit trivialem Zentrum und $cl(S) = cl(X)$, dann ist $S \cong X$.*

Von der Charaktertafel aus gesehen ist die folgende Vermutung hierzu dual.

Vermutung 4.4 *(Huppert 2000) [13]. Für eine endliche Gruppe G bezeichne $cd(G)$ die Menge der Grade der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere. Ist S eine einfache endliche Gruppe und X irgendeine endliche Gruppe mit $cd(S) = cd(X)$, dann ist $X \cong S \times A$ mit A abelsch.*

Von der Verifizierung beider Vermutungen scheint man noch weit entfernt zu sein. Die Vermutung von Thompson ist für einfache Gruppen G mit $|\Pi(G)| \geq 3$ bewiesen [7], jene von Huppert für einige einfache Gruppen kleiner Ordnung und wenige Serien von Gruppen vom Lietyp kleiner Dimension [13].

Hinweise zu den Referenzen. Referenzen [1], [12] [17], [18] sind geeignet um sich in die Theorie der endlichen Gruppen einzulesen.
Die Bücher der Referenz [11] sind der erste Versuch, einen kohärenten Beweis der Klassifikation darzulegen. Es wird in ihnen aber auch bereits der Versuch unternommen, Teile des Beweises zu überarbeiten.

Literatur

[1] M. Aschbacher Finite group theory, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 1986.

[2] J.Conway et. al. Atlas of Finite Groups. Clarendon Press, Oxford 1985.

[3] H. Bender Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt, J. of Alg. **17** (1971), 527 - 554.

[4] R. Brauer and K. A. Fowler Groups of even order, Ann.Math. **62** (1955), 565 - 583.

[5] R. Brauer and M. Suzuki On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a generalized quaternion group. Proc.Nat.Acad.Sci. **45** (1959), 175 - 179.

[6] R. Carter, Simple groups of Lie type. John Wiley London 1972.

[7] Chen Guiyun, On Thompson's Conjecture, J. of Alg. **185**(1996), 184 - 193.

[8] W. Feit and J. G. Thompson, Solvability of groups of odd order, Pacific J.Math. **13**(1963), 775 - 1029.

[9] G. Glauberman Central elements in core free groups, J.Alg **4** (1966), 403 - 420.

[10] D. Gorenstein An outline of the classification of the finite simple groups, The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979), pp. 3–28, Proc. Sympos. Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[11] D.Gorenstein, R.Lyons and R.Solomon, The classification of the finite simple groups. Number 1 - 6. Mathematical Surveys and Monographs, Volumes 40.1 - 40.6 American Mathematical Society, Providence, RI, 1994 - 2005.

[12] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Grundlehren der math. Wiss. Band 134, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1967. B- Huppert and N. Blackburn, Finite Groups II and III, Grundlehren der Math. Wiss. Band 242 und 243, Springer 1982.

[13] B. Huppert, Some simple groups which are determined by their set of character degrees, Illinois J. of Math. **44** no.4, (2000), 828 - 842.

[14] Z. Janko, A new finite simple group with Abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, J. of Algebra **3**, (1966) bzw. Proc.Nat.Acad.Sci. **53** (1965), 657-658.

[15] W. Kimmerle, R. Lyons, R. Sandling and D. Teague, Composition factors from the group ring and Artin's theorem on the orders of finite simple groups, Proc.London Math.Soc.(3) 60 (1990), 89 – 122.

[16] A. S. Kondrat'ev, On prime graph components of finite simple groups (Russian), Mat.Sb.180 (1989), no.6, 787 – 797,864 ; translated in Math. USSR Sb. Vol.67 (1990).

[17] H. Kurzweil und B. Stellmacher Theorie der endlichen Gruppen, Springer Verlag 1998.

[18] M. Suzuki, Group Theory I and II, Grundlehren der math. Wiss. Band 247 und 248, Springer 1982 bzw. 1986.

[19] M. Suzuki, On the prime graph of a finite simple group, an application of the method of Feit-Thompson-Bender-Glauberman, Advanced Studies in Pure Math. **32**] Groups and Combinatorics - in memory of Michio Suzuki, 41 – 207, Math.Soc.of Japan 2001.

[20] J. G. Thompson, Nonsolvable groups all of whose local subgroups are solvable I - VI, Bull. AMS **74** 1968 383 - 437; Pacific J.Math. **33** (1970), 451 - 536, **39** (1971), 483 - 534, **48** (1973), 511-592, **50** (1974), 215 - 297, **51** (1974), 573 - 630.

[21] E. Witt Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938), 265 – 264.

[22] J. S. Williams, Prime graph components of finite groups, J. of Alg. **21** (1981), 487 – 513.

Autor:
apl. Prof. Dr. Wolfgang Kimmerle
IGT, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart, D-70550 Stuttgart
kimmerle@mathematik.uni-stuttgart.de