Mathematik–Online:
Beiträge zu berühmten, gelösten und ungelösten Problemen

Nummer 5 - Dezember 2008

Stützfunktionen in der ebenen nichteuklidischen Geometrie

von Kurt Leichtweiß

Wir beginnen der Einfachheit halber mit der Beschreibung von Figuren in der euklidischen $(\xi, \eta)-$Ebene, die von überall einseitig gekrümmten, geschlossenen Kurven ohne Überschneidung begrenzt werden. Eine solche Kurve zerlegt die volle Ebene in das Innere einer beschränkten Menge, nämlich unserer Figur, und in eine unbeschränkte äußere Menge (Jordanscher Kurvensatz). Um diese Figur analytisch beschreiben zu können, ist die Tatsache von Nutzen, daß sie *konvex* sein muß, d.h. daß die Schnittmenge mit einer beliebigen Geraden in der Ebene entweder leer, ein Punkt oder eine Strecke ist. Daraus folgt nämlich, daß jede von einem beliebig fest gewählten inneren Punkte o der Figur F ausgehende Halbgerade h den Rand ∂F von F in genau einem Punkt $r(h)$ schneidet. Somit erhalten wir die Darstellung von ∂F durch Polarkoordinaten

$$\partial F: \quad \rho = d(\varphi), \tag{1}$$

wobei $d(\varphi)$ den Abstand von o und $r(h)$ sowie φ den Polarwinkel von h darstellt.

Ändert man nun den Bezugspunkt o in einen Bezugspunkt o' mit den Polarkoordinaten a und φ_0 ab, so wird aus der Darstellung (1) von ∂F die Darstellung

$$\partial F: \quad \rho' = d'(\varphi') \tag{2}$$

mit

$$d'(\varphi') = \sqrt{d(\varphi)^2 + a^2 - 2ad(\varphi)\cos(\varphi - \varphi_0)},$$

wobei der Polarwinkel φ' von der Halbgeraden h' durch

$$\varphi' = \varphi_0 + \pi - \arccos \frac{-d(\varphi)^2 + a^2 + d'(\varphi')^2}{2ad'(\varphi')}$$

gegeben ist (Anwendung des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie!)

Da dieses Transformationsgesetz sehr kompliziert ist,wird man versuchen, von einer ganz anderen Darstellung von ∂F auszugehen. Dazu sehen wir ∂F nicht als die Menge der Randpunkte von F, sondern gewissermaßen dual als die Hüllkurve der ∂F berührenden aber nicht zerschneidenden orientierten Geraden t an, welche als *Stützgeraden* von ∂F bzw. F bezeichnet werden. Ist der Randpunkt r kein Eckpunkt von F, so ist die (eindeutig bestimmte) Stützgerade $t(r)$ von F durch r die Tangente von ∂F durch r; an einer Ecke von F ist ∂F nicht differenzierbar.

Nun kann die Stützgerade t von F durch ihren Polarwinkel φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ und ihren (orientierten) Abstand $H(\varphi)$ vom Ursprung o festgelegt werden

$$t: \quad -\xi \sin\varphi + \eta\cos\varphi - H(\varphi) = 0 \tag{3}$$

(Hessesche Normalform). Dies gestattet uns, die Funktion $H(\varphi)$ als *Stützfunktion* von ∂F zu bezeichnen. Bei einer Transformation $o \mapsto o'$, ausgedrückt durch

$$\xi' = \xi - \alpha_1,\ \eta' = \eta - \alpha_2 \quad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ Koordinaten von } o'),$$

geht (3) in die Gleichung

$$-\xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi - H'(\varphi) = 0 \tag{4}$$

über, sodaß aus aus dem Vergleich von (3) und (4)

$$H'(\varphi) = H(\varphi) + \alpha_1 \sin\varphi - \alpha_2 \cos\varphi \tag{5}$$

folgt. Diese Äderung der Darstellung von ∂F durch ihre Stützfunktion ist aber in der Tat viel einfacher als bei der Polarkoordinatendarstellung (1) die Änderung (2).

Aus Gründen der Vereinfachung beschränken wir uns von nun an auf Figuren F, deren Rand ∂F unendlich oft differenzierbar (und daher ohne Ecken) ist sowie überall positive *Krümmung*

$$k := \frac{d\varphi}{ds} \quad (ds \text{ Bogenelement von } \partial F)$$

besitzt. Dann geht durch jeden Randpunkt $r \in \partial F$ genau eine Stützgerade t und umgekehrt berührt jede Stützgerade t von ∂F diesen Rand ∂F in einem einzigen Punkt. Solche Kurven nennnt man *Eilinien.* Sie lassen sich in unserem Fall als Hüllkurven bekanntlich durch Auflösung des durch (3) und

$$-\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi - \frac{dH}{d\varphi} = 0 \tag{6}$$

gebildeten Gleichungssystems nach ξ und η in der Form

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{dH}{d\varphi}\cos\varphi - H\sin\varphi \\ \eta &= -\frac{dH}{d\varphi}\sin\varphi + H\cos\varphi\end{aligned} \tag{7}$$

darstellen, da sich die Stützfunktion $H(\varphi)$ als (beliebig oft) differenzierbar erweist.

Aus (7) errechnet sich mühelos (wenn Ableitungen nach φ kurz mit aufgesetztem Punkt gekennzeichnet werden)

$$\dot{\xi} = -(\ddot{H} + H)\cos\varphi,\ \ \dot{\eta} = -((\ddot{H} + H)\sin\varphi, \tag{8}$$

woraus man wegen $\dot{\xi} < 0$ (positiver Durchlaufungssinn von ∂F !) auf $\ddot{H} + H > 0$ und somit

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = \ddot{H} + H \tag{9}$$

sowie

$$k = \frac{1}{\ddot{H} + H} \tag{10}$$

schließen kann. Wir merken noch die einfache Darstellung

$$H(\varphi) = \max_{(\xi,\eta)\in\partial F}(-\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi) \tag{11}$$

für die Stützfunktion $H(\varphi)$ an (vgl.(3)).

Zum Schluß ein *Beispiel*: ∂F sei die Ellipse $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$ mit den Halbachsenlängen $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Die Tangente durch ihren Punkt (ξ_0, η_0) mit $\xi_0 < 0,\ \eta_0 > 0$ hat bekanntlich die Gleichung

$$\frac{\xi_0}{\alpha^2}\xi + \frac{\eta_0}{\beta^2}\eta = 1 \tag{12}$$

und schneidet aus der ξ-Achse bzw. η-Achse die Strecken $\overline{0\frac{\alpha^2}{\xi_0}}$ bzw. $\overline{0\frac{\beta^2}{\eta_0}}$ heraus. Der Richtungswinkel φ dieser Tangente oder auch Stützgerade von ∂F ist daher gegeben durch $\tan\varphi = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\xi_0}{\eta_0}$ oder

$$\eta_0\alpha^2\sin\varphi + \xi_0\beta^2\cos\varphi = 0. \tag{13}$$

Die Lösung des Gleichungssystems, bestehend aus (13) und

$$\frac{\xi_0^2}{\alpha^2} + \frac{\eta_0^2}{\beta^2} = 1, \tag{14}$$

ergibt sich zu

$$\xi_0 = -\frac{\alpha^2\sin\varphi}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi}}, \quad \eta_0 = \frac{\beta^2\cos\varphi}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi}}, \tag{15}$$

sodaß man aus (15) in Verbindung mit (3)

$$H(\varphi) = -\xi_0\sin\varphi + \eta_0\cos\varphi = \sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi} \tag{16}$$

erhält. An diesem Beispiel läßt sich leicht die Gültigkeit von (7) wegen (15) verifizieren.

Im zweiten Teil unseres Artikels wollen wir versuchen, die Ergebnisse des ersten Teils von der euklidischen in die nichteuklidische Geometrie zu übertragen. Die nichteuklidische ebene Geometrie, welche aus der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie besteht, soll dabei durch die Halbsphäre S

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_0 > 0 \tag{17}$$

im euklidischen (x_0, x_1, x_2)-Raum E_3 bzw. das Halbrotationshyperboloid W

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, \quad x_0 > 0 \tag{18}$$

im sogenannten *pseudoeuklidischen* (x_0, x_1, x_2)-Raum E_3^1 (mit der inneren Produktmetrik $\langle(x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2)\rangle := x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2$) als Modell repräsentiert werden. Im sphärischen Fall spielen nun die halben Großkreise von S (als lokal kürzeste Kurven) die Rolle der Geraden, im hyperbolischen Fall tun dies ebenfalls die Schnitte von W mit Ebenen durch den Koordinatenursprung. Diese Kurven heißen auch die *Geodätischen* von S bzw. W.

Man bezeichnet nun den Rand ∂F einer Figur F in S bzw. W als (*geodätisch*) *konvex*, wenn durch jeden seiner Punkte eine (geodätische) Stützgerade von ∂F oder F geht. Die analytische Bedingung lautet dafür

$$k(p) \geqq 0 \text{ für alle } p \in \partial F, \tag{19}$$

wobei k für die Krümmung von ∂F im Sinne der Riemannschen Geometrie steht (die Einbettung von S in E_3 bzw. von W in E_3^1 macht S und W zu Räumen mit Riemannscher Metrik, auf die wir noch zu sprechen kommen wollen).

Die Hauptschwierigkeit der Definition einer Stützfunktion für F in S oder W ist aber die Tatsache, daß es schwierig ist, eine Stützgerade t von F durch ihren Polarwinkel φ festzulegen. Es hat sich gezeigt, daß der folgende Weg günstig ist: Man schreibe nicht t, sondern der durch $(1,0,0)$ gehenden und zu t in einem gewissen Sinn parallelen Geraden den Winkel φ zu. Nun gibt es aber in der nichteuklidischen Geometrie keine parallelen Geraden im herkömmlichen Sinn, sondern nur zu Geraden *geodätisch parallele* Kurven. Letztere sind in unserem Fall die Orthogonaltrajektorien aller zu einer Leitgeraden

$$-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi = 0 \tag{20}$$

durch $(1,0,0)$ mit dem Polarwinkel φ orthogonalen Geraden. Nach der Variationsformel für die Länge eines geodätischen Kurvenbogens mit freiem Rand ist nun eine solche Trajektorie gleichzeitig eine Kurve konstanten Abstands von ihrer Leitgeraden, eine sogenannte *Abstandskurve*. Dies läuft darauf hinaus, als Stützelemente der Eilinie ∂F im nichteuklidischen Fall nicht mehr Geodätische als Geraden, sondern Abstandskurven von Geraden heranzuziehen.

Konkret bedeutet dies folgendes: Im Falle der Halbsphäre S sind die halben Kleinkreise von S orthogonal zur Ebene $x_0 = 0$ derartige Abstandskurven mit der Darstellung

$$-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi = \sin H(\varphi) \quad (-\frac{\pi}{2} < H(\varphi) < \frac{\pi}{2}), \tag{21}$$

worin $H(\varphi)$ den konstanten geodätischen Abstand der Kurve (21) von der Leitgeraden (20) bedeutet. Wenn man nun ∂F als geodätisch konvex mit $(1,0,0)$ als Innenpunkt voraussetzt, so ist der Grundriß $\partial F'$ von ∂F auf der Ebene $x_0 = 0$ offensichtlich euklidisch konvex, und deshalb wird ∂F in jedem seiner Punkte von einem halben Kleinkreis mit passendem $H(\varphi)$ gestützt. Wir bezeichnen hier $H(\varphi)$ als *sphärische Stützfunktion* von ∂F.

Im hyperbolischen Fall des halben Rotationshyperboloids W liegen die Verhältnisse etwas schwieriger: Bekanntlich sind die Abstandskurven seiner Leitgeraden (20) wiederum in vertikalen Ebenen

$$-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi = \sinh H(\varphi) \tag{22}$$

gelegen und besitzen von ihren Leitgeraden den konstanten geodätischen Abstand $H(\varphi)$. Man kann aber nicht sagen, daß geodätisch konvexe Kurven ∂F in W in allen ihren Punkten von solchen Abstandskurven gestützt werden. Dies ist aber z.B. dann gesichert, wenn ∂F an allen Punkten eine geodätische Krümmung $k \geqq 1$ besitzt, weil unsere Abstandskurven immer eine konstante Krümmung $k < 1$ haben. Solche Eilinien nennt man *horozyklisch konvex*. In diesem Fall wird man also $H(\varphi)$ sinngemäß als *hyperbolische Stützfunktion* bezeichnen. Zusammenfassend gilt daher die analytische

Definition:

$$H(\varphi) := \arcsin \max_{(x_0,x_1,x_2)\in\partial F} (-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi) \tag{23}$$

bzw.

$$H(\varphi) := \operatorname{arsinh} \max_{(x_0,x_1,x_2)\in\partial F} (-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi) \tag{24}$$

heißt Stützfunktion von ∂F in S bzw. von ∂F in W, wenn ∂F geodätisch konvex ist und den Punkt $(1,0,0)$ *enthält bzw. wenn ∂F horozyklisch konvex ist* (vgl. (11) im euklidischen Fall!).

Es ist zweckmäßig, sich diese Definition auch für ebene Modelle der nichteuklidischen Ebene zu veranschaulichen. Dies kann einfach durch Zentralprojektion ρ von S bzw. W vom Ursprung aus auf die Tangentialebene $x_0 = 1$ von S bzw. W geschehen, in welcher wir durch $\xi = x_1, \eta = x_2$ euklidische Koordinaten ξ, η einführen wollen. Diese, in der Astronomie auch *gnomonisch* genannte Projektion, bildet S bzw. W diffeomorph auf die ganze (ξ,η)-Ebene bzw. auf die offene Einheitskreisscheibe

$$D: \quad \xi^2 + \eta^2 < 1 \tag{25}$$

mittels

$$\xi = \frac{x_1}{x_0}, \quad \eta = \frac{x_2}{x_0} \tag{26}$$

ab; die Umkehrung hiervon lautet

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}, \quad x_1 = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}, \quad x_2 = \frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$$

bzw.

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}, \quad x_1 = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}, \quad x_2 = \frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}. \tag{27}$$

Hierbei gehen die Geodätischen von S bzw. W in Geraden der (ξ,η)-Ebene bzw. Geradenstücke von D über. Desgleichen werden unsere Stützabstandkurven auf S (halbe Kleinkreise) in Hyperbeläste mit dem Mittelpunkt $(1,0,0)$ und die entsprechenden Kurven (22) auf W wegen (27b) in Halbellipsen mit den (euklidischen) Halbachsenlängen 1 und $\tanh H(\varphi)$ in D abgebildet.

So wie wir bisher den Figurenrand ∂F als Hüllkurve der Stützabstandskurven (21) bzw. (22) angesehen haben, werden wir dies zwecks einfacherer Berechnung auch für $\rho(\partial F)$ in bezug auf die halben ρ-Bilder

$$-(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi)^2 + \frac{(-\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi)^2}{\tan^2 H(\varphi)} = 1$$

von (21) (siehe (27a)) bzw.

$$(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi)^2 + \frac{(-\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi)^2}{\tanh^2 H(\varphi)} = 1 \tag{28}$$

von (22) tun. Dies ist möglich, weil die Stützfunktion $H(\varphi)$ aufgrund des Hauptsatzes über implizite Funktionen von der Differenzierbarkeitsklasse C^∞ ist, sodaß das übliche Rechenverfahren zur Hüllkurvenbestimmung (Auflösung des aus (28a) bzw. (28b) und der partiellen Ableitung von (28a) bzw. (28b) nach φ gewonnenen Gleichungssystems nach ξ und η) hier nach einiger Rechnung die Darstellung

$$\xi = \frac{-\dot{H}}{\sqrt{1-\dot{H}^2}}\cos\varphi - \frac{\tan H}{\sqrt{1-\dot{H}^2}}\sin\varphi, \quad \eta = \frac{-\dot{H}}{\sqrt{1-\dot{H}^2}}\sin\varphi + \frac{\tan H}{\sqrt{1-\dot{H}^2}}\cos\varphi$$

$(-\frac{\pi}{2} < H < \frac{\pi}{2})$ bzw.

$$\xi = \frac{-\dot{H}}{\sqrt{1+\dot{H}^2}}\cos\varphi - \frac{\tanh H}{\sqrt{1+\dot{H}^2}}\sin\varphi, \quad \eta = \frac{-\dot{H}}{\sqrt{1+\dot{H}^2}}\sin\varphi + \frac{\tanh H}{\sqrt{1+\dot{H}^2}}\cos\varphi \tag{29}$$

für $\rho(\partial F)$ im sphärischen bzw. im hyperbolischen Fall ergibt (vgl. (7) in dem euklidischen Fall !). Daraus folgt durch Einsetzung von von (29a) bzw. (29b) in (27a) bzw. (27b) rückwirkend als Darstellung für den Figurenrand ∂F selbst:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{1-\dot{H}^2}\cos H \\ x_1 &= -\dot{H}\cos H\cos\varphi - \sin H\sin\varphi \\ x_2 &= -\dot{H}\cos H\sin\varphi + \sin H\cos\varphi \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{1+\dot{H}^2}\cosh H \\ x_1 &= -\dot{H}\cosh H\cos\varphi - \sinh H\sin\varphi \\ x_2 &= -\dot{H}\cosh H\sin\varphi + \sinh H\cos\varphi. \end{aligned} \tag{30}$$

Beispiele : 1) Ein Punkt $(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ in der Halbsphäre S.

Hier folgt aus (23) unmittelbar

$$H(\varphi) = \arcsin(-x_1^{(0)}\sin\varphi + x_2^{(0)}\cos\varphi), \tag{31}$$

und man verifiziert leicht die Gültigkeit von (30a).

2) Horozykel Z in D mit Mittelpunkt $(0,-1)$ und Halbachsen $b = 0.5, a = \sqrt{b}$.

Dieser ist, euklidisch gesehen, eine Ellipse, die den Rand von D dreipunktig berührt und daher die Darstellung

$$\frac{\xi^2}{0.5} + \frac{(\eta+0.5)^2}{0.5^2} = 1 \tag{32}$$

besitzt. Hier berührt die Stützabstandskurve (28b) von Z mit dem Polarwinkel φ ihrer Leitgeraden diesen Horozykel im Schnittpunkt r der Zykelnormalen $\xi = -\tau\sin\varphi,\ \eta = -1+\tau\cos\varphi$ mit Z, d.h. im Punkt

$$r = (\frac{-2\sin\varphi\cos\varphi}{1+\cos^2\varphi}, \frac{-1+\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}). \tag{33}$$

Da r auf (28b) liegt, haben wir

$$\tanh H(\varphi) = \frac{1-\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}$$

und damit schließlich

$$H(\varphi) = -\log\cos\varphi. \tag{34}$$

Auch hier verifiziert man leicht die Gültigkeit von (29b) für den Berührpunkt (33) mit dem Parameterwert φ $(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$.

Aus den Darstellungen (30a) bzw. (30b) errechnet sich nun für den Bogenlängenparameter s und die geodätische Krümmung k der (im positiven Sinn durchlaufenen) Kurve ∂F:

$$\frac{ds}{d\varphi} := \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{H}^2}}\,(\ddot{H}\cos H + (1-\dot{H}^2)\sin H) \geqq 0$$

bzw.

$$\frac{ds}{d\varphi} := \sqrt{-\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{H}^2}}\,(\ddot{H}\cosh H + (1+\dot{H}^2)\sinh H) \geqq 0 \tag{35}$$

und

$$k := (\frac{d\varphi}{ds})^3 \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \dot{x}_0 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix} = \frac{-\ddot{H}\sin\varphi + (1-\dot{H}^2)\cos H}{\ddot{H}\cos H + (1-\dot{H}^2)\sin H}$$

bzw.

$$k := (\frac{d\varphi}{ds})^3 \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \dot{x}_0 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix} = \frac{\ddot{H}\sinh H + (1+\dot{H}^2)\cosh H}{\ddot{H}\cosh H + (1+\dot{H}^2)\sinh H}. \tag{36}$$

Diese Formeln stellen die Verallgemeinerung von (9) und (10) auf die sphärische bzw. hyperbolische Differentialgeometrie dar. Dabei ist zu berücksichtigen, daß sich der Kurvenparameter φ an den Stellen, wo $\frac{ds}{d\varphi} = 0$ gilt, singulär verhalten kann, aber diese Ausnahmemenge ist nirgends dicht, da sie wegen der Eckenlosigkeit von ∂F keine inneren Punkte besitzt. In der Tat gilt bei unserem vorigen Beispiel (31) nach (35a) $\frac{ds}{d\varphi} \equiv 0$, und übrigens findet man für den Horozykel (34) wegen (36b) $k \equiv 1$.

Die Stützfunktionsdarstellungen (30a,b) von ∂F besitzen die folgenden bemerkenswerten Eigenschaften:

- gute algorithmische Verwertbarkeit
- Ästhetik
- einfache Darstellbarkeit der Polarkurven
- leichte Evolutenbildung

• einfache Darstellbarkeit von Kurven konstanter Breite

• desgleichen von Parallelkurven.

Wir wollen dies im folgenden einzeln erläutern: Die beiden erstgenannten Eigenschaften sind ganz offensichtlich. Weiter ist bekannt, daß man die Kurve der in S gelegenen Pole der ∂F tangierenden Großkreishälften als *Polkurve* $(\partial F)^* \subset S$ von $\partial F \subset S$ bezeichnet. Desgleichen wird die entsprechende Kurve für $\partial F \subset W$ *Polkurve* $(\partial F)^*$ genannt, diese Polkurve liegt aber nicht wieder in W, sondern in

$$W^* : \quad -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2, \;\; x_0 > 0, \tag{37}$$

einem halben einschaligen Rotationshyperboloid. Die ρ-Bilder von ∂F und $(\partial F)^*$ sind daher (euklidisch) polar in der (ξ, η)-Ebene $x_0 = 1$ bezüglich des Einheitskreises ∂D : $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Einfache geometrische Überlegungen ergeben im sphärischen Fall

$$H^*(\varphi + \pi) = \frac{\pi}{2} - H(\varphi) \tag{38}$$

und damit $(\partial F)^*$:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{1 - \dot{H}^2}\sin H \\ x_1 &= -\dot{H}\sin H\cos\varphi + \cos H\sin\varphi \\ x_2 &= -\dot{H}\sin H\sin\varphi - \cos H\cos\varphi, \end{aligned}$$

wenn ∂F durch (30a) gegeben ist. Im hyperbolischen Fall haben wir dagegen nach einer geeigneten dualen Definition von H^* für $(\partial F)^*$:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{1 + (\dot{H}^*)^2}\sinh H^* \\ x_1 &= -\dot{H}^*\sinh H^*\sin\varphi - \cosh H^*\sin\varphi \\ x_2 &= -\dot{H}^*\sinh H^*\sin\varphi + \cosh H^*\cos\varphi, \end{aligned} \tag{39}$$

wenn ∂F durch (30b) gegeben war.

Was die Hüllkurve der Normalen (senkrecht schneidenden Geodätischen) n einer Kurve ∂F in S bzw. W, die sogenante *Evolute* E von ∂F, angeht, sehen wir folgendes: E ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte m von ∂F mit dem Abstand

$$\arctan\frac{1}{k} = H + \arctan\frac{\ddot{H}}{1 - \dot{H}^2}$$

bzw.

$$\operatorname{artanh}\frac{1}{k} = H + \operatorname{artanh}\frac{\ddot{H}}{1 + \dot{H}^2} \tag{40}$$

von ∂F (siehe (36a,b), woraus sich eine einfache Darstellung von E leicht errechnen läßt.

Diejenigen konvexen Kurven ∂F in S bzw. W, deren Stützfunktion der Relation

$$H(\varphi) + H(\varphi + \pi) = b = \text{const} \;\; (b < \pi \text{ in the spherical case}) \tag{41}$$

genügt, heißen (wie im euklidischen Fall) *Kurven konstanter Breite* b. Sie sind im hyperbolischen Fall automatisch horozyklisch konvex und haben die beiden folgenden wichtigen Eigenschaften:

α) Für antipodische Punkte p und $\bar{p}$ (mit $\bar{\varphi} = \varphi + \pi$) gilt:

$$n(p) = n(\bar{p}) \quad \text{sowie} \quad m(p) = m(\bar{p}), \tag{42}$$

β) Für den Umfang $L := \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ und die Gesamtkrümmung $J := \int_0^{2\pi} k \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ ist

$$L = J \tan(\frac{b}{2}) \quad \text{bzw.} \quad L = J \tanh(\frac{b}{2}). \tag{43}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus (35a,b) und (36a,b).

Als letztes betrachten wie die äußere Parallelkurve ∂F_ϵ von ∂F vom Abstand $\epsilon = \text{const} > 0$ (im sphärischen Fall mit $H(\varphi) + \epsilon < \frac{\pi}{2}$). Für deren Stützfunktion H_ϵ (siehe (23) bzw. (24)) gilt offensichtlich

$$H_\epsilon(\varphi) = H(\varphi) + \epsilon. \tag{44}$$

Damit wird durch Einsetzung in (35a,b) und (36a,b) aufgrund der Additionstheoreme der trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen für den Umfang L_ϵ und die Gesamtkrümmung J_ϵ von ∂F_ϵ

$$L_\epsilon = L \cos\epsilon + J \sin\epsilon, \quad J_\epsilon = -L \sin\epsilon + J \cos\epsilon$$

bzw.

$$L_\epsilon = L \cosh\epsilon + J \sinh\epsilon, \quad J_\epsilon = L \sinh\epsilon + J \cosh\epsilon. \tag{45}$$

Aus (45a) bzw. (45b) gewinnt man für den Flächeninhalt V_ϵ von ∂F_ϵ

$$V(F_\epsilon) = V + \int_0^\epsilon L_\epsilon\, d\epsilon = V + L \sin\epsilon + J(1 - \cos\epsilon)$$

bzw.

$$V(F_\epsilon) = V + \int_0^\epsilon L_\epsilon\, d\epsilon = V + L \sinh\epsilon + J(\cosh\epsilon - 1). \tag{46}$$

Dies ist die nichteuklidische Verallgemeinerung der Formel von J.Steiner

$$V(F_\epsilon) = V + L\epsilon + 2\pi \frac{\epsilon^2}{2}, \tag{47}$$

dem Ausgangspunkt der (euklidischen) Theorie der konvexen Körper.

Autor:
Prof. Dr. (em.) Kurt Leichtweiß
IGT, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart, D-70550 Stuttgart
leichtweiss@mathematik.uni-stuttgart.de