Aufgabe V1

Ermitteln Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n - n^3}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^7}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3n}$

Lösung

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{2/n^2-1} = 0$$

b) $$\frac{n!}{n^7} \geq (n-7)! \to \infty$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3} = e^3$$

Aufgabe V3

Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \,.$$

Lösung

a) Geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - 1 = \frac{5}{3}$$

b) Partialbruchzerlegung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{1}{2}$$

Aufgabe V4

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^3} \right)$

Lösung

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+1/x}-\sqrt{3+2/x}}{\sqrt{1}} = 1-\sqrt{3}$$

b)

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right) = \lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4-12}{(2-x)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{(2-x)(x^2+2x+4)} = -\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe V5

Wir betrachten eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f([a, b]) = [a, b]$. Zeigen Sie, es existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass $f(\xi) = \xi$ ist.

Lösung

Ist $f(a) = a$ oder $f(b)) = b$, so ist Behauptung bewiesen.
Für $f(a) > a$, $f(b) < b$:
Sei $g(x) := f(x) - x$. g ist stetig auf $[a, b]$.

$$g(a) = f(a) - a < 0 \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - b > 0$$

Zwischenwertsatz:
Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $g(\xi) = 0$

$$\Rightarrow \quad g(\xi) = f(\xi) - \xi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\xi) = \xi \quad \Rightarrow \quad \xi \text{ ist Fixpunkt}$$

Aufgabe V6

Zeigen Sie: Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch

$$m(x) := \max_{x \in [a,b]} \{f(x), g(x)\}$$

stetig auf $[a, b]$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass man

$$m(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right)$$

setzen darf und folgern Sie hieraus die Stetigkeit von $\max_{x \in [a,b]} \{f(x), g(x)\}$.

Lösung

Fall 1: $\max f, g = f \quad \Rightarrow \quad f \geq g \quad \rightarrow f - g \geq 0$
$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) = f$
Fall 2: $\max f, g = g \quad \Rightarrow \quad f \leq g \quad \rightarrow f - g \leq 0$
$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) = g$
Deshalb

$$m(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

Aus der Stetigkeit von $|f - g|$ folgt somit die Stetigkeit von m.
Stetigkeit von $h \rightarrow |h|$:
Sei $x, x_0 \in [a, b]$, h stetig in x_0, $\varepsilon > 0$
$\rightarrow$ es existiert $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

$$||h(x)| - |h(x_0)|| \leq |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

Somit ist Betragsfunktion stetig.

Aufgabe V8

Gegeben ist

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}\,.$$

Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich dieser Funktionen.
Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und (stetig) hebbare Definitionslücken.

Lösung

Faktorisierung des Nenners:

$$\begin{aligned}(x^4-2x^3-3x^2+8x-4):(x-1) &= x^3-x^2-4x+4\\ =x^2(x-1)-4(x-1) &= (x-1)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad D=\mathbb{R}\setminus\{-2,1,2\}$

Faktorisierung des Zählers:

$x^3-2x^2-x+2=(x-2)(x^2-1)=(x-2)(x-1)(x+1)$

$$\Rightarrow \text{für alle } x\in D: \quad \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Wertebereich } \mathbb{R}$$

In $x=-1$ ist f stetig fortsetzbar

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$

Aufgabe V10

Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x^2)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{(x^4)}-1}{(1-\cos(x))^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin(x)\cos(x)}{(x+\sin(x)\cos(x))e^{\sin(x)}}$

Lösung

a) $\dfrac{\sin(x^2)}{x} \leq \dfrac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

b) Mit l'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^4)} - 1}{(\sin(x))^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 e^{(x^4)}}{2\sin(x)\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(16x^6 + 12x^2)e^{(x^4)}}{2(\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x))} = \frac{0 \cdot 1}{2(1-0)} = 0\end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin(x)\cos(x)}{(x + \sin(x)\cos(x))e^{\sin(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\sin(x)}} \quad \text{existiert nicht}$$

Aufgabe V12

Bestimmen Sie für die Funktionen

a) $\dfrac{1}{1+f(x)}$ **b)** $f\big(f(x)\big)$ **c)** $f^{-1}(x)$

mit

$$f(x) = x\mathrm{e}^x$$

die ersten drei Terme der Taylor-Entwicklungen zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung

a) $f(x) = x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots\right) = x + x^2 + \dots$

b) Ansatz für Taylorpolynom $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+f(x)} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$

c) $f\left(x + x^2 + \dots\right) = x + x^2 + (x + x^2 + \dots)^2 + \dots = x + 2x^2 + \dots$

d) Mit $f^{-1}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$
und $f(0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$ folgt $b_0 = 0$.

$$\begin{aligned} x &= f(b_1 x + b_2 x^2 + \dots) = (b_1 x + b_2 x^2) + (b_1 x + b_2 x^2)^2 + \dots \\ &= b_1 x + (b_1^2 + b_2)x^2 \\ &\Rightarrow \quad b_1 = 1,\ b_2 = -1 \end{aligned}$$

Aufgabe V13

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x^2+1)\cos(2x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi^{2/3}} 3\sqrt{x}\,\sin^2\left(x^{3/2}-\pi\right)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x-\sin^{17}(x)}{\mathrm{e}^{x^2}\left(\cos^{34}(x)+2\right)}\,dx$

Lösung

a) Zweifache partielle Integration

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} (x^2+1)\cos(2x)\,dx \\
= \;& \left[(x^2+1)\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x\sin(2x)\,dx \\
= \;& 0 - \left(\left[-\frac{x}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2x)\,dx\right) \\
= \;& \left[-\frac{\pi}{4} - 0\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Lösung

b) Substitution $t(x) = x^{3/2} - \pi,\ t'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^{2/3}} 3\sqrt{x}\,\sin^2\left(x^{3/2}-\pi\right)\,dx &= 2\int_{-\pi}^{0}\sin^2(t)\,dt \\ &= [t - \sin(t)\cos(t)]_{-\pi}^{0} = \pi\end{aligned}$$

Lösung

c) Substitution $x(t) = 3\sin(t)$, $x'(t) = 3\cos(t)$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= \int \frac{27\sin^3(t)}{\sqrt{9-9\sin^2(t)}}\,3\cos(t)\,dt \\ &= 27\int \sin^3(t)\,dt = -27\left[\cos(t) - \frac{1}{3}\cos^3(t)\right]\end{aligned}$$

Mit $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \frac{1}{3}\sqrt{9-9\sin^2(t)} = \frac{1}{3}\sqrt{9-x}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= -27\left[\frac{1}{3}\sqrt{9-x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\sqrt{9-x}\right)^3\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 18 - 7\sqrt{6}\end{aligned}$$

Lösung

d) Der Integrand ist ungerade:

$$f(-x) = \frac{-x - \sin^{17}(-x)}{e^{(-x)^2}\big(\cos^{34}(-x)+2\big)} = -\frac{x - \sin^{17}(x)}{e^{x^2}\big(\cos^{34}(x)+2\big)} = -f(x)$$

Somit

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= -\int_{\pi}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe V14

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Werte.

a) $$\int_{\pi/4}^{+\infty} e^{-x} \cos x \, dx$$

b) $$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(1-x)^2} \, dx$$

Lösung

a) Zweifache Partielle Integration

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x}\cos x\,dx &= \left[e^{-x}\sin(x)\right] + \int e^{-x}\sin(x)\,dx \\
&= \left[e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x)\right] - \int e^{-x}\cos(x)\,dx
\end{aligned}
$$

führt auf

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\pi/4}^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx &= \lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x)-\cos(x))\right]_{\pi/4}^{\beta} \\
&= \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2}e^{-\beta}(\sin(\beta)-\cos(\beta)) - 0 = 0
\end{aligned}
$$

Lösung

b) Der Integrand ist in $x = 1$ nicht definiert.

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{1-x}\right]_{-\infty}^{1} + \left[\frac{1}{1-x}\right]_{1}^{2} \quad \Rightarrow \quad \text{existiert nicht}$$

Aufgabe V15

Integrieren Sie

$$\frac{5x^4 - 3x^3 + 32x^2 - 20x + 48}{x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x - 32}.$$

Lösung

- Faktorisierung des Nenners $p(x)$

$$p(2) = 0$$

Polynomdivision

$$p(x) : (x-2) = x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2+4)^2$$

- Ansatz

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{5x^4 - 3x^3 + 32x^2 - 20x + 48}{(x-2)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B+Cx}{x^2+4} + \frac{D+Ex}{(x^2+4)^2}$$

Multiplikation mit $p(x)$

$$\begin{aligned} & 5x^4 - 3x^3 + 32x^2 - 20x + 48 \\ = \; & (A+C)x^4 + (B-2C)x^3 + (8A - 2B + 4C + E)x^2 \\ & \quad +(4B - 8C + D - 2E)x + (16A - 8B - 2D) \end{aligned}$$

Lösung

- Koeffizientenvergleich

	A	B	C	D	E
5	1	0	1	0	0
-3	0	1	-2	0	0
32	8	-2	4	0	1
-20	0	4	-8	1	-2
48	16	-8	0	-2	0

$$\Rightarrow \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{3}{x-2} + \frac{1+2x}{x^2+4} + \frac{-4+2x}{(x^2+4)^2}$$

Lösung

- Integration

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3}{x-2}\,dx &= [3\ln|x-2|] \\
\int \frac{1+2x}{x^2+4}\,dx &= \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\
&= \left[\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right] \\
\int \frac{2x-4}{(x^2+4)^2} &= \int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx - \int \frac{x^2+4}{(x^2+4)^2}\,dx + \int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx
\end{aligned}
$$

Lösung

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[x\cdot\frac{-1}{x^2+4}\right]+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int \frac{5x^4-3x^3+32x^2-20x+48}{x^5-2x^4+8x^3-16x^2+16x-32}\,dx =$$

$$\left[\ln\left|(x-2)^3(x^2+4)\right|-\frac{x/2+1}{x^2+4}+\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

Aufgabe V16

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Lösung

a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{x}}}}{\sqrt{x}}$ ist monoton fallend auf $[1, \infty)$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ und $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ haben dasselbe Konvergenzverhalten

Substitution: $u = -2\sqrt{x}$, $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -\int_{-2}^{-\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{u}}}{d} u = -\left[\mathrm{e}^{\mathrm{u}}\right]_{-2}^{-\infty} = \mathrm{e}^{-2}$$

$\Rightarrow$ Integral konvergiert $\quad \Rightarrow$ Reihe konvergiert

Lösung

b) Monotonie:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}\ln(x)}{x\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \mathrm{e}^2$$

f ist monoton fallend, also hat

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{7} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=8}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

dasselbe Konvergenzverhalten wie

$$\begin{aligned} \int_{x=8}^{\infty} \ln(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{\beta\to\infty} \left[2\ln(x)\sqrt{x}\right]_{x=8}^{\beta} - 2\int_{x=8}^{\beta} \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \left[2\sqrt{x}(\ln(x) - 4)\right]_{x=8}^{\beta} \end{aligned}$$

und divergiert somit.

Aufgabe V17

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bei $(0,0)$ nicht stetig ist, obwohl jede Annäherung auf einer Geraden den Funktionswert $f(0,0)$ als Grenzwert liefert:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2\,x\,y^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lösung

Ursprungsgerade:

$$c_1(t) = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 > 0,\ t \in \mathbb{R}_0^+$$

Funktionsgrenzwert

$$\lim_{t \to 0} f(c_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{2\,at\,b^2 t^2}{a^2 t^2 + b^4 t^4} = \lim_{t \to 0} \frac{2\,ab^2 t}{a^2 + b^4 t^2} = 0 = f(0,0)$$

Für $a = 0$ folgt $f(c(t)) = \frac{0}{b^4 t^4} = 0 = f(0,0)$. Jede Annäherung auf einer Geraden liefert den Funktionswert $f(0,0)$ als Grenzwert.

Mit $c_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ folgt

$$\lim_{t \to 0} f(c_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{2\,t^2\,t^2}{t^4 + t^4} = 1 \neq f(0,0)$$

Aufgabe V18

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad x + y \neq 0$$

das Taylor-Polynom vom Grad zwei zum Entwicklungspunkt $(1, 1)$.

Lösung

Umformung passend zum Entwicklungspunkt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-1)-(y-1)}{2+(x-1)+(y-1)} \\ &= \frac{(x-1)-(y-1)}{2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right)} \end{aligned}$$

Geometrische Reihe

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{(x-1)-(y-1)}{2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right)} \\ &= \frac{(x-1)-(y-1)}{2}\Bigg(1+\left(\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right) \\ &\quad +\left(\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right)^2+\left(\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right)^3+\ldots\Bigg) \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad f(x,y) &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}(x-1)^3 + \frac{1}{8}(x-1)^2(y-1) \\ &\quad - \frac{1}{8}(x-1)(y-1)^2 - \frac{1}{8}(y-1)^3\end{aligned}$$

Aufgabe V19

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{-x}(x^2-3)(y^2-3)\,.$$

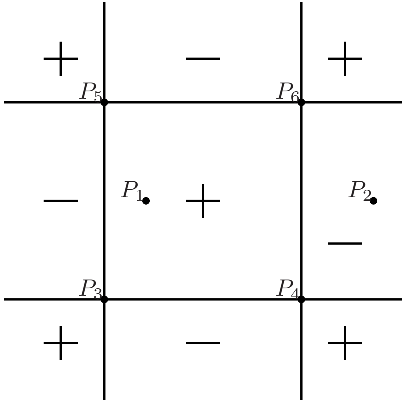
a) Skizzieren Sie in der xy–Ebene diejenigen Bereiche, in denen $f(x,y)$ positiv, negativ bzw. Null ist.

b) Berechnen Sie alle kritischen Punkte von f und bestimmen Sie deren Typ.

c) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf dem Quadrat $[-1,1]^2$.

Lösung

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(y-\sqrt{3})(y+\sqrt{3})$
Punktprobe $f(0,0) = 1(-3)(-3) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Vorzeichenverteilung



Lösung

b)

$$\operatorname{grad} f(x,y) = e \begin{pmatrix} -(y^2-3)(x^2-2x-3) \\ 2y(x^2-3) \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Zweite Zeile: $y = 0$ oder $x = \pm\sqrt{3}$
$y = 0$ in erste Zeile: $x = 1 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad P_1 = (-1,0),\ P_2 = (3,0)$
$x = \pm\sqrt{3}$ in erste Zeile: $\pm 2\sqrt{3}(y^2-3) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{ll} P_3 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), & P_4 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \\ P_5 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}), & P_6 = (\sqrt{3}, \sqrt{3}) \end{array}$$

Aus Skizze und $\lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0$:

P_1	lokales Maximum
P_2	lokales Minimum
$P_3 - P_6$	Sattelpunkte

Lösung

c) P_1 ist globales Maximum auf $[-1,1]^2$ mit $f(P_1) = 6\,\mathrm{e}$
Auf den Randkurven

$$\begin{aligned} f(-1,y) &= -2\,\mathrm{e}(y^2-3) \\ f(1,y) &= -2\,\mathrm{e}^{-1}(y^2-3) \\ f(x,\pm 1) &= -2\,\mathrm{e}^{-x}(x^2-3) \end{aligned}$$

liegen im Bereich $[-1,1]$ nur lokale Maxima
$\Rightarrow$ P_1 ist globales Maximum
Eckpunkte:

$$f(-1,\pm 1) = 4\,\mathrm{e} \qquad f(1,\pm 1) = \frac{4}{\mathrm{e}} \quad \text{globale Minima}$$

Aufgabe V20

Bestimmen Sie das Minimum der Funktion

$$f(x, y, z) = 3y + 4z$$

auf der Schnittkurve des Zylinders $Z : x^2 + y^2 = 1$ und der Ebene $E : x + z = 0$.

Lösung

Nebenbedingungen

$$\begin{array}{llll} \text{Zylinder:} & x^2+y^2=1 & \Rightarrow & g_1(x,y,z)=x^2+y^2-1=0 \\ \text{Ebene:} & x+z=0 & \Rightarrow & g_2(x,y,z)=x+z=0 \end{array}$$

Aus $\operatorname{grad} f(x,y,z) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(x,y,z)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 3 &= 2\lambda_1 y \\ 4 &= \lambda_2 \\ 0 &= x^2+y^2-1 \\ 0 &= x+z \end{aligned}$$

Aus Zeile 3: $\lambda_2 = 4$

Eingesetzt in Zeile 1: $\quad 2\lambda_1 x = -4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \neq 0 \neq x$ und $x = -\frac{2}{\lambda_1}$

Lösung

λ_2 eingesetzt in Zeile 2: $\quad 2\lambda_1 y = 3 \quad \Rightarrow \quad y \neq 0$ und $y = \dfrac{3}{2\lambda_1}$

x und y eingesetzt in Zeile 4: $\quad 0 = \dfrac{4}{\lambda_1^2} + \dfrac{9}{4\lambda_1^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \pm\dfrac{5}{2}$

Mit Zeile 5:

$$P_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad P_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Die Nebenbedingungen beschreiben eine Ellipse.

$$f(P_1) = 5 > -5 = f(P_2) \quad \Rightarrow \quad P_1 \text{ Maximum}, P_2 \text{ Minimum}$$

Aufgabe V21

Gegeben sei das von dem reellen Parameter α abhängige Vektorfeld

$$g(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x^2+\alpha y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) .$$

a) Für welches α besitzt g in $D : (x-2)^2 + (y-1)^2 < 1$ eine Potentialfunktion?

b) Zeigen Sie, dass $U(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ eine Potentialfunktion von g für das in **a)** bestimmte α ist.

c) Berechnen Sie für $\alpha = 2$ und den Weg

$C(t) = (\cos t, \sin t),\ \ t \in [\pi/4,\, 5\pi/4]$ das Integral $\int_C g(v) \cdot dv$.

Lösung

a) D ist einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ Potential existiert, falls

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y) &= (x^3 + xy^2(2-\alpha))(x^2+y^2)^{-3/2} \\ \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y) &= x^3(x^2+y^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

gleich sind $\Rightarrow$ $\alpha = 2$

b)

$$\operatorname{grad} U = \begin{pmatrix} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ für $\alpha = 2$ ist U ein Potential von g

Lösung

c)

$$\begin{aligned}\int_C g(x)\cdot dx &= U\left(C\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) - U\left(C\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)\\ &= U\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

Aufgabe V22

Bestimmen Sie ein Potential des im Ursprung stetig fortgesetzten Vektorfeldes

$$g(x,y) = \frac{(x-y)^5}{2(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 2x^2 + xy + 3y^2 \\ -3x^2 - xy - 2y^2 \end{pmatrix},$$

indem Sie das Kurvenintegral $\int_C g(r) \cdot dr$ längs des Geradenstückes vom Ursprung zum Punkt $P = (a, b)$ berechnen.

Lösung

Polarkoordinaten $\qquad f(r\cos t, r\sin t)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{r^5}{r^4}\frac{(\cos t - \sin t)^5}{2} r^2 \begin{pmatrix} 2\cos t^2 + \cos t \sin t + 3 \sin t^2 \\ -3\cos t^2 - \cos t \sin t - 2\sin t^2 \end{pmatrix} \\
&\leq r^3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\rightarrow g$ ist im Ursprung durch $(0,0)$ stetig ergänzbar.
Parametrisierung

$$c(t) = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

Kurvenintegral

$$\int_C g(r) \cdot dr = \int_0^1 g(c(t)) \cdot c'(t)\, dt$$

Lösung

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{t^5(a-b)^5}{2t^4(a^2+b^2)^2}\, t^2 \begin{pmatrix} 2a^2+ab+3b^2 \\ -3a^2-ab-2b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\, dt \\
&= \frac{(a-b)^5}{2(a^2+b^2)^2}\left(2a^3-2a^2b+2ab^2-2b^3\right)\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{(a-b)^5}{4(a^2+b^2)^2}(a^2+b^2)(a-b) = \frac{(a-b)^6}{4(a^2+b^2)}
\end{aligned}$$

Somit ist

$$U(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{(x-y)^6}{4(x^2+y^2)} & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Potential von g.