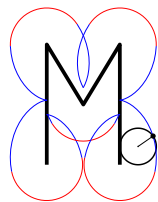
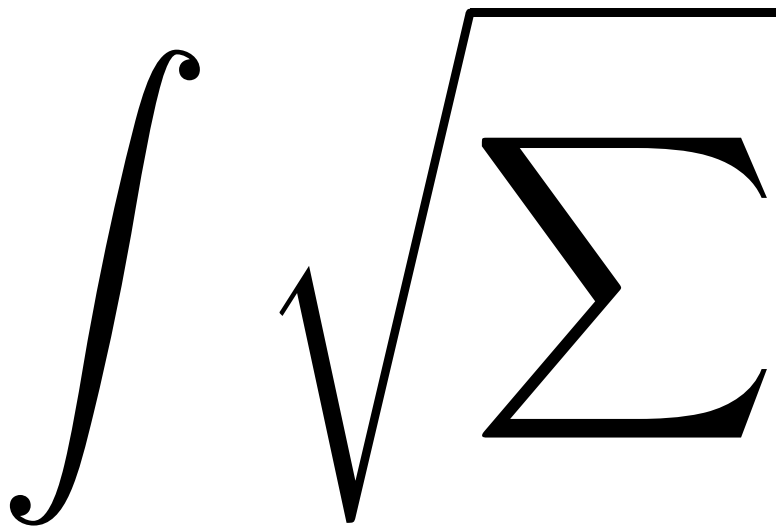


Mathematik–Online–Kurs
FORMELSAMMLUNG





Mathematik–Online–Kurs

FORMELSAMMLUNG

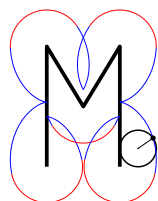
Stand: 30. Januar 2006

Konzipiert von M. Reble

© 2006 Mathematik-Online

Diese Veröffentlichung ist urheberrechtlich geschützt.

Weder Mathematik-Online noch einer der Autoren übernehmen Haftung für die Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit oder Qualität dieser Veröffentlichung. Haftungsansprüche, welche sich auf Schäden materieller oder ideeller Art beziehen, die durch die Nutzung oder Nichtnutzung der dargebotenen Informationen bzw. durch die Nutzung fehlerhafter und unvollständiger Informationen verursacht wurden, sind grundsätzlich ausgeschlossen.



<http://www.mathematik-online.org/>



Vorwort

Diese Broschüre wurde im Rahmen des Projektes „Mathematik-Online“ erstellt. Sie richtet sich an Studenten der Ingenieur- und Naturwissenschaften und ist insbesondere als Nachschlagehilfe und zur Prüfungsvorbereitung geeignet.

Ich danke Herrn Hörner für die technische Leitung, Herrn Reble für die Ausarbeitung der Inhalte sowie Herrn Wipper für wertvolle Ergänzungen.

Die gemeinsame Arbeit an dem Projekt hat mir viel Freude bereitet, und ich wünsche den Lesern viel Spaß mit „Mathematik-Online“ und Erfolg in ihrem Studium.

Stuttgart, im Februar 2004

Klaus Höllig



Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen	8
1.1	Aussagenlogik	8
1.2	Mengen	8
1.3	Kombinatorik	9
1.4	komplexe Zahlen	10
2	Vektorrechnung	11
2.1	Vektoren	11
2.2	Geraden und Ebenen	12
2.3	Ellipse , Parabel, Hyperbel	12
3	Analysis einer Veränderlichen	13
3.1	Funktionen	13
3.2	Folgen und Reihen	13
3.3	Differentiation	15
3.4	Integration	17
4	Lineare Algebra	18
4.1	Grundlegende Strukturen	18
4.2	Matrizen	19
4.3	Determinanten und lineare Gleichungssysteme	21
4.4	Quadriken	22
5	Analysis mehrerer Veränderlicher	23
5.1	Differentiation	23
5.2	Integration	24
6	Differentialgleichungen	25
6.1	spezielle Differentialgleichungen	25
6.2	spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen	25
6.3	Allgemeine Theorie	26
6.4	Lineare Systeme	27
6.5	Laplace-Transformation	27
6.6	Sturm-Liouville-Probleme	29
7	Vektoranalysis	30
7.1	Differentiation	30
7.2	Integration	33

8	Komplexe Analysis	36
8.1	Grundfunktionen	36
8.2	komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen	36
8.3	Integration	37
8.4	Residuenkalkül	38
8.5	Potenzreihen	39
8.6	Differentialgleichungen	40
9	Fourier-Analysis	41
9.1	Fourier-Reihen	41
9.2	Diskrete Fourier-Transformation	42
9.3	Fourier-Transformation	42
9.4	Multivariate Fourier-Transformation	44



1 Mathematische Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Logische Verknüpfungen	Bezeichnung	Schreibweise	Sprechweise
	Negation	$\neg A$	nicht A
	Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
	Disjunktion	$A \vee B$	A oder B
	Antivalenz	$A \not\equiv B$	entweder A oder B
	Implikation	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
	Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A äquivalent B
Regeln	$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ Morgansche Regeln $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ Distributivgesetze $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ $A \vee \neg A = w$ $A \wedge \neg A = f$ weitere Regeln $A \vee w = w$ $A \wedge w = A$ $A \vee f = A$ $A \wedge f = f$		
Quantoren	Existenzquantor: \exists (es gibt mindestens ein) Allquantor: \forall (für alle)		

1.2 Mengen

Mengenoperationen	Vereinigung: $A \cup B$ Durchschnitt: $A \cap B$ Differenz: $A \setminus B$ symmetrische Differenz: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
Regeln	$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ Morgansche Regeln $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ Distributivgesetze $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Relation	$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$ reflexiv: $(a, a) \in R$ symmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ antisymmetrisch: $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ transitiv: $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ total: $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$ Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

1.3 Kombinatorik

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$

Regeln

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0$$

Kombinationen

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
mit Wiederholungen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Wiederholungen	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

1.4 komplexe Zahlen

Betrag $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argument $\cos \varphi = x/r$ und $\sin \varphi = y/r$

Polarform $x + iy = z = r e^{i\varphi}$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
y	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

(r=1)

Euler-Moivre $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Division $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2 = (r_1/r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Wurzel $z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\varphi/n} e^{2\pi i k/n}$

Mittelsenkrechte $|z - a| = |z - b|$

Kreisgleichung $|z - a| = s |z - b| \Leftrightarrow |z - w| = r$

$$w = \frac{1}{1 - s^2} a - \frac{s^2}{1 - s^2} b, \quad r = \frac{s}{|1 - s^2|} |b - a|$$

2 Vektorrechnung

2.1 Vektoren

Betrag	$ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Dreiecksungleichung	$ \vec{a} + \vec{b} \leq \vec{a} + \vec{b} $
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{a} \vec{b} \cos \varphi$
Vektorprodukt	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \sin \varphi$
Grassmann-Identität	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$
Lagrange-Identität	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$
Spatprodukt	$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ zyklische Vertauschung: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$
Vektor in ONB $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$	$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$
Polarkoordinaten	$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \varphi \in (-\pi, \pi]$
Zylinderkoordinaten	$x = \varrho \cos \varphi, \quad \varrho \geq 0$ $y = \varrho \sin \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ $z = z, \quad z \in \mathbb{R}$
Kugelkoordinaten	$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad r \geq 0$ $y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ $z = r \cos \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi]$

2.2 Geraden und Ebenen

Gerade	Parameterform: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$ Momentenform: $(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = 0$
Ebene	Parameterform: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ Hesse-Normalform: $\vec{x} \cdot \vec{n} = h$
Abstand Punkt-Gerade	$d = \frac{ (\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u} }{ \vec{u} }$
Abstand windschiefer Geraden	$d = \frac{ [(\vec{q} - \vec{p}), \vec{u}, \vec{v}] }{ \vec{u} \times \vec{v} }$
Abstand Punkt-Ebene	$d = \vec{p} \cdot \vec{n} - h / \vec{n} $

2.3 Ellipse , Parabel, Hyperbel

Ellipse	Summe der Abstände zu zwei Brennpunkten $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ konstant $ \overrightarrow{PF_-} + \overrightarrow{PF_+} = 2a$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$ $r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2(\varphi)}$
Parabel	Gleicher Abstand von Brennpunkt $F = (0, f)$ und einer Leitgeraden $g : y = -f$ $4fy = x^2$ $r = \frac{4f \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$
Hyperbel	Differenz der Abstände zu zwei Brennpunkten $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ konstant $ \overrightarrow{PF_-} - \overrightarrow{PF_+} = \pm 2a$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$ $r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$

3 Analysis einer Veränderlichen

3.1 Funktionen

Exponentialfunktion

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische Funktionen

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Hyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

3.2 Folgen und Reihen

Konvergenz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

a heißt Grenzwert von a_n : $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Konvergenz-Ordnung p

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c |a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Monotonie-Kriterium

beschränkte, monotone Folgen sind konvergent

Vergleichs-Kriterium

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \rightarrow a \text{ und } c_n \rightarrow a \Rightarrow b_n \rightarrow a$$



Spezielle Grenzwerte ($n \rightarrow \infty$)	$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^a$ $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad (a > 0)$ $\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$ $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$ $a^n n^k \rightarrow 0 \quad (a < 1)$	$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0 \quad (a > 1)$
--	--	--

Notw. Kriterium für Konvergenz bei Reihen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Majorantenkriterium $|a_n| < b_n$ und $\sum b_n$ konvergiert

Quotientenkriterium $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$

Wurzelkriterium $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$

Vergleichskriterium $a_n, b_n > 0, a_n/b_n \rightarrow c > 0$
 $\Rightarrow a_n, b_n$ haben gleiches Konvergenzverhalten

Integral-Kriterium $a_n = f(n)$ und $f(x)$ monoton fallend
 $\Rightarrow \int_c^\infty f(x) dx$ und $\sum_n a_n$ haben gleiches Konvergenzverhalten

Leibniz-Kriterium a_n alterniert und $|a_n|$ ist monotone Nullfolge

Spezielle Reihen	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$	$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (x < 1)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad (x < 1)$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x$
------------------	--	--

Harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leq 1$

3.3 Differentiation

Linearität $(r f(x) + s g(x))' = r f'(x) + s g'(x)$

Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$

Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Kettenregel $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$

Umkehrfunktion $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$

Logarithmische Ableitung $f'(x) = f(x) (\ln f(x))', \quad f(x) > 0$

Leibniz-Regel $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

Wichtige Ableitungen	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
	c	0	x^n	$n x^{n-1}$
	e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
	$a^x (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
	$\ln x $	$1/x$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
	$\arcsin x (x < 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
	$\arccos x (x < 1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
	$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
	$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arcosh} x (x > 1)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
	$\operatorname{artanh} x (x < 1)$	$1/(1-x^2)$		

KAPITEL 3. ANALYSIS EINER VERÄNDERLICHEN

Mittelwertsatz $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Verallgemeinerter
Mittelwertsatz $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Regel von l'Hospital $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (bei $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$)

Satz von Taylor $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n$
 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$

Newton-Verfahren $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Leibniz-Regel $\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + b'(t) f(b(t), t) - a'(t) f(a(t), t)$

Extremum
 notwendig: $f'(x) = 0$
 hinreichend für Minimum (Maximum): zusätzlich $f''(x) > 0$ (< 0)

Wendepunkt
 notwendig: $f''(x) = 0$; hinreichend: zusätzlich $f'''(x) \neq 0$



3.4 Integration

Hauptsatz $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

partielle Integration $\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$

Substitution $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy, \quad y = g(x), dy = g'(x)dx$

wichtige Substitutionen $\sqrt{a^2 - x^2}$ Subst.: $x = a \sin t$
 $\sqrt{a^2 + x^2}$ Subst.: $x = a \sinh t$
 $R(\sin x, \cos x)$ Subst.: $t = \tan \frac{x}{2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1)$	$1/x$	$\ln x $
e^x	e^x	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

Volumen Rotationskörper Rotation um x -Achse: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Rotation um y -Achse (für f monoton wachsend):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x)) dx$$

Mantelfläche Rotationskörper $M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Bogenlänge $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

Trapez-Regel $\int_a^b f(x) dx = h(f(a)/2 + f(a+h) + \dots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$
 $R_h = -\frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \xi \in (a, b)$

4 Lineare Algebra

4.1 Grundlegende Strukturen

Gruppe	Assoziativgesetz: $a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$ Neutrales Element: $a \diamond e = e \diamond a = a$ Inverses Element: $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$
abelsche Gruppe	kommutativ: $a \diamond b = b \diamond a$
Körper	$(K, +)$ ist abelsche Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Vektorraum	abelsche Gruppe $(V, +)$ über Skalarkörper K $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$ $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$ $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$ $1 \cdot v = v$
Skalarprodukt	$\langle v, v \rangle > 0$ für $v \neq 0$ $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
orthogonale Basis	$x = \sum_{k=1}^n c_k u_k, c_k = \frac{\langle x, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$ $ x ^2 = \sum_{k=1}^n c_k ^2 u_k ^2$
Cauchy-Schwarz	$ \langle u, v \rangle \leq u v , u = \sqrt{\langle u, u \rangle}$
Norm	$\ v\ > 0, v \neq 0$ $\ \lambda v\ = \lambda \ v\ $ $\ u + v\ \leq \ u\ + \ v\ $
Lineare Abbildung	Additivität: $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ Homogenität: $L(\lambda v) = \lambda L(v)$
Bild und Kern	$\text{Bild}(L) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ mit } L(v) = w\}$ $\text{ker}(L) = \{v \in V : L(v) = 0\}$ $\dim V = \dim \text{ker}(L) + \dim \text{Bild}(L)$

4.2 Matrizen

Matrix-Multiplikation	$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$ $A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^* = B^*A^*$
Kommutator	$[A, B] = AB - BA$
Rang	Anzahl linear unabhängiger Zeilen / Spalten $\text{Rang } A = \text{Rang } A^t$ $\text{Rang } (BAC) = \text{Rang } (A), \quad (B, C \text{ invertierbar})$
Spur	Summe der Diagonalelemente: $\text{Spur } A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$ $\text{Spur } (AB) = \text{Spur } (BA)$
hermitesch (symmetrisch)	$A^* = A \quad (A^t = A)$ nur reelle Eigenwerte, es gibt ONB aus Eigenvektoren
unitär (orthogonal)	$A^* = A^{-1} \quad (A^t = A^{-1})$ $ \det A = 1, \text{ Spalten bilden ONB}$
normal	$AA^* = A^*A$ $\Leftrightarrow \text{unitär diagonalisierbar}$
Drehmatrix	$A \text{ orthogonal und } \det A = 1$ Drehachse ist Eigenvektor zum Eigenwert 1 Drehwinkel: $\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1)$
Spiegelung	Ebene $E : d^t x = 0 :$ $M = E - 2 \frac{dd^t}{d^t d}$ Gerade $G : x = \lambda v :$ $M = 2 \frac{vv^t}{v^t v} - E$

Eigenwerte / -vektoren	$Av = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$ $\sum \lambda_i = \text{Spur } A, \quad \prod \lambda_i = \det A$ A^t hat Eigenwert λ A^{-1} hat Eigenvektor v und Eigenwert $1/\lambda$ A^n hat Eigenvektor v und Eigenwert λ^n $Q^{-1}AQ$ hat Eigenvektor $Q^{-1}v$ und Eigenwert λ
Diagonalisierung	für alle Eigenwerte: algebr. = geometr. Vielfachheit $B^{-1}AB = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis aus Eigenvektoren
Jordan-Form	Blockdiagonalmatrix $J = B^{-1}AB = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$ Blöcke haben Eigenwert λ auf der Diagonale, 1 auf der oberen Nebendiagonale
Matrix-Potenzen	$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$ $ \lambda_i < 1 \Leftrightarrow A^n \rightarrow 0$
Singulärwertzerlegung	$U^*AV = \text{diag}(s_1, s_2, \dots), \quad U, V$ unitär singuläre Werte $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k > 0, k = \text{Rang } A$ s_i sind Wurzeln der Eigenwerte von A^*A Spalten von V sind Eigenvektoren von A^*A Spalten von U sind Eigenvektoren von AA^*

4.3 Determinanten und lineare Gleichungssysteme

Determinante	$\det A^t = \det A$, $\det(AB) = \det A \det B$ $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, $\det A^n = (\det A)^n$ Vertauschung zweier Spalten (Zeilen) ändert Vorzeichen. Addition eines Vielfachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen ändert den Wert der Determinante nicht.
Entwicklung	$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$ (Entwicklung nach Zeile k) $= \sum_{l=1}^n (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$ (Entwicklung nach Spalte l)
$\det A = 0$	$\Leftrightarrow 0$ ist Eigenwert $\Leftrightarrow Ax = b$ hat keine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow A$ hat nicht vollen Rang $\Leftrightarrow A$ ist nicht invertierbar
Lineare Gleichungssysteme	besitzen entweder genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen
Gauß-Transformationen	Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht bei: Vertauschen zweier Gleichungen Multiplikation einer Gleichung mit $r \neq 0$ Addition zweier Gleichungen
Cramersche Regel	$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(a_1, \dots, a_n)}$
Ausgleichsproblem	$ Ax - b \rightarrow \min \Leftrightarrow A^t Ax = A^t b$

4.4 Quadriken

Grobeinteilung	$Q: x^t A x + 2b^t x + c = 0, \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right)$
	kegelige Quadrik: $\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A$
	Mittelpunktsquadrik: $\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 1$
	parabolische Quadrik: $\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 2$
Mittelpunkt	$A m = -b$
Normalformen	
Kegelige Quadriken	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (Doppel-)Kegel
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ schneidende Ebenen
Mittelpunktsquadriken	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ zweischaliges Hyperboloid
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ einschaliges Hyperboloid
	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ Ellipsoid
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ hyperbolischer Zylinder
	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ elliptischer Zylinder
	$-\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$ parallele Ebenen
Parabolische Quadriken	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$ elliptisches Paraboloid
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$ hyperbolisches Paraboloid
	$\frac{x^2}{a^2} + 2y = 0$ parabolischer Zylinder

5 Analysis mehrerer Veränderlicher

5.1 Differentiation

Gradient	$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t$
Jacobi-Matrix	$f' = J f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
Hesse-Matrix	$H f = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \dots & \partial_1 \partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f & \dots & \partial_n \partial_n f \end{pmatrix}$
Kettenregel	$h(x) = g(y), y = f(x) : h'(x) = g'(y) f'(x)$
Taylor-Entwicklung	$f(x+h) = \sum_{ \alpha \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$ Restglied $R = \sum_{ \alpha =n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+\theta h) h^\alpha$ für ein $\theta \in [0, 1]$ Ordnung 2: $f(x+h) = f(x) + (\text{grad } f(x))^t h + \frac{1}{2} h^t H f(x) h + O(h ^3)$
Tangential-Ebene	Fläche $f(x, y, z) = c$ bzw. $(u, v) \mapsto p(u, v)$ Normalenvektor $n = \text{grad } f$ bzw. $n = p_u \times p_v$
Richtungsableitung	$\partial_v f(x) = (\text{grad } f)^t v$
Implizite Funktionen	$\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \Rightarrow f(x, y) = 0$ auflösbar nach x
Umkehrfunktion	f ist lokal umkehrbar, wenn $\det f'(x_0) \neq 0$ $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}, y = f(x)$ für $x \approx x_0$
kritische Punkte	$\text{grad } f(x) = 0$ elliptisch: Alle Eigenwerte von H haben das gleiche Vorzeichen → lokales Extremum hyperbolisch: Es gibt Eigenwerte mit verschiedenem Vorzeichen → Sattelpunkt parabolisch: Mindestens ein Eigenwert ist Null, und alle anderen Eigenwerte haben das gleiche Vorzeichen.
Lagrange-Multiplikatoren	Extremwert x_* unter Nebenbedingungen $g_i(x) = 0$ $\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)$
Kuhn-Tucker Bedingung	Extremwert x_* unter Nebenbedingungen $g_i(x) \geq 0$ $\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*), \lambda^t g(x_*) = 0$ Minimum: $\lambda_i \geq 0$, Maximum: $\lambda_i \leq 0$

5.2 Integration

Substitution	$\int_U f(g(x)) \det g'(x) dx = \int_{g(U)} f(y) dy$
ebenes Flächenelement	kartesische Koordinaten: $dA = dx dy$ Polarkoordinaten: $dA = r dr d\varphi$
Volumenelement	kartesische Koordinaten: $dV = dx dy dz$ Zylinderkoordinaten: $dV = \rho d\rho d\varphi dz$ Kugelkoordinaten: $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$
Kurvenintegral	$\int_C f = \int_a^b f(c(t)) c'(t) dt$
Flächenelement	parametrisiert: $dS = s_u \times s_v du dv$ Funktion $z(x, y)$: $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$ Zylindermantel: $dS = \rho d\varphi dz$ Kugeloberfläche: $dS = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$
Schwerpunkt	$x_S = \frac{1}{m} \int_V x \rho(x) dV$
Trägheitsmoment	$I = \int_V \text{dist}(x, g)^2 \rho(x) dV$
Hauptsatz	$\int_V \text{grad } f = \int_{\partial V} f n^\circ$
1. Greenscher Satz	$\int_{\partial V} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \text{grad } f \cdot (\text{grad } g)^\dagger + f \Delta g$
2. Greenscher Satz	$\int_{\partial V} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) = \int_V (f \Delta g - g \Delta f)$

6 Differentialgleichungen

6.1 spezielle Differentialgleichungen

Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp(P(x) - P(x_0)), \quad y_p = \int_{x_0}^x \exp(P(x) - P(s)) q(s) ds$$

mit P Stammfunktion von p und $y(x_0) = y_0 \Rightarrow c = y_0$

Bernoulli DGL

$$y' + p(x)y = q(x)y^k$$

Substitution $u = y^{1-k}$

$$\frac{1}{1-k}u' = -p(x)u + q(x)$$

Separable DGL

$$y' = p(x)g(y)$$

Trennung der Veränderlichen

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x) dx$$

Homogene DGL

$$y' = f(y/x)$$

Substitution $xz(x) = y(x)$

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

Exakte DGL

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

notwendig für Exaktheit: $p_y = q_x$

implizite Lösung $F(x, y) = c$ mit $F_x = p$ und $F_y = q$

Konstante Koeffizienten

$$u'' + pu' + qu = 0$$

Nullstellen λ_1, λ_2 des charakteristischen Polynoms:

zwei reelle: $u_h = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t)$

eine doppelte: $u_h = a \exp(\lambda t) + b t \exp(\lambda t)$

konjugiert komplex mit $\lambda_{1,2} = \mu \pm \rho i$:

$$u_h = \exp(\mu t)(a \cos(\rho t) + b \sin(\rho t))$$

Gedämpfte harmonische

Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c \cos(\omega t)$$

starke Dämpfung: $r^2 > \omega_0^2$

kritische Dämpfung: $r^2 = \omega_0^2$

schwache Dämpfung: $r^2 < \omega_0^2$

$$u_p = \tilde{c} \cos(\omega t + \delta) \text{ mit } \tilde{c} = c / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

und $\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - i2r\omega)$

Resonanz: $\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$

6.2 spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j \rightarrow y_p = \sum_{j=0}^n d_j x^j$$

$$q(x) = c \exp(\lambda x), \lambda \neq p \rightarrow y_p = \frac{c}{\lambda - p} \exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c \exp(px) \rightarrow y_p = cx \exp(px)$$

$$q(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) \rightarrow y_p = c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)$$

2. Ordnung $u'' + pu' + qu = f(t)$

$f(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j \rightarrow u_p = \sum_{j=0}^n u_j t^j$, falls $q \neq 0, p \neq 0$

$f(t) = \exp(\lambda t) \rightarrow u_p = c \exp(\lambda t)$, falls $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$
 Ist λ eine einfache (doppelte) Nullstelle des charakteristischen Polynoms, muss c durch ct (ct^2) ersetzt werden.

$f(t) = \exp(\alpha t)(a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t))$
 $\rightarrow u_p = \exp(\alpha t)(c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t))$
 Sind $\alpha \pm i\omega$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms, muss u_p mit t multipliziert werden.

Allgemein Bestimmung der Koeffizienten von u_p durch Einsetzen.
 Allgemeine Lösung ist $y = y_h + y_p$ bzw. $u = u_h + u_p$.
 Bei gemischten Fällen Superposition der einzelnen Ansätze.

6.3 Allgemeine Theorie

Satz von Peano $u' = f(t, u), u(t_0) = u_0$ f stetig: Anfangswertproblem besitzt mindestens eine stetig differenzierbare Lösung
 f Lipschitz-stetig bzgl. u : Lösung des Anfangswertproblems ist eindeutig

Picard-Iteration $u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u^\ell(\tau)) d\tau, u^0(t) = u_0$

Abhängigkeit von Anfangsbedingungen $|v(t) - w(t)| \leq |v(t_0) - w(t_0)| \exp(L(t - t_0))$
 mit L Lipschitz-Konstante von f bzgl. u

Abhängigkeit von rechter Seite $u' = f(t, u), v' = g(t, v),$ mit $u(t_0) = v(t_0)$
 $|u(t) - v(t)| \leq \varepsilon(t - t_0) \exp(L(t - t_0))$ mit
 $\varepsilon = \max_{(s,w) \in D} |f(s, w) - g(s, w)|$

Reduktion der Ordnung $u'' = f(u, u')$ Substitution $u' = v(u)$ liefert $v \frac{dv}{du} = f(u, v)$

Stabilität $u' = f(u)$ Kritischer Punkt u_* : $f(u_*) = 0$
 Linearisierung: $v' = f'(u_*)v$ mit $v = u - u_*$
 stabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_*, u(0) \approx u_* \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \forall \lambda_i$
 nicht stabil $\Leftrightarrow \exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$
 mit λ_i den Eigenwerten von $f'(u_*)$

6.4 Lineare Systeme

Wronski-Determinante $\Gamma' = A(t)\Gamma$	$(\det \Gamma)' = \text{Spur } A(t)(\det \Gamma)$, Γ Fundamentalmatrix
Variation der Konstanten $u' = A(t)u + b(t)$	Ansatz $u_p = \Gamma c$ ergibt $c' = \Gamma^{-1}(t) b(t)$, $u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int_{t_0}^t \Gamma(s)^{-1} b(s) ds \right]$
Konstante Koeffizienten $u'(t) = A u(t)$	Ist v Eigenvektor zum Eigenwert λ , dann ist $u(t) = \exp(\lambda t) v$ Lösung. Bei komplexem Eigenwert $\lambda = \sigma + i\rho$ zu Eigenvektor $a + ib$ sind $\text{Re}(\exp(\lambda t) v) = \exp(\sigma t) (a \cos(\rho t) - b \sin(\rho t))$ und $\text{Im}(\exp(\lambda t) v) = \exp(\sigma t) (a \sin(\rho t) + b \cos(\rho t))$ reelle Lösungen.
Jordan-Form $u'(t) = A u(t) + b(t)$	$Q^{-1} A Q = J$: Substitution $u = Q v$ ergibt das System $v' = J v + Q^{-1} b$, das sukzessive komponentenweise gelöst werden kann. Entkoppeltes System $v'_i = \lambda_i v_i + (Q^{-1} b)_i$ bei diagonalem J
Euler- Differentialgleichung $a_n t^n u^{(n)} + \dots + a_0 u = f(t)$	Substitution $t = e^s$, $v(s) = u(t)$ ergibt lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $v(s)$
Stabilität $u' = A u$	stabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \Leftrightarrow \text{Re } \lambda_i < 0 \forall \lambda_i$, für (2×2) -Matrix: $\det A > 0 \wedge \text{Spur} < 0$ neutral stabil: $u(t)$ beschränkt und es gibt Anfangswerte, für die $ u(t) $ nicht gegen 0 konvergiert instabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty \Leftarrow \exists \lambda_i : \text{Re } \lambda_i > 0$

6.5 Laplace-Transformation

Laplace-Transformation $U = \mathcal{L}u$, $U(s) = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-st) dt$

Inverse Transformation $u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} U(s) \exp(st) ds$

Linearität $au(t) + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$

Differentiation $u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$
 $t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$

Integration $\int_0^t u(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty U(\tau) d\tau$

Verschiebung $u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad u(t) = 0 \text{ für } t < 0$
 $\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$

T -periodische Funktion $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1 - \exp(-Ts)} \int_0^T u(t) \exp(-st) dt$

Skalierung $u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} U(s/a)$

Faltung $(u \star v)(t) = \int_0^t u(\tau) v(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)V(s)$

Spezielle Funktionen	$u(t)$	$U(s)$	$u(t)$	$U(s)$
	1	$1/s$	t^n	$n!/s^{n+1}$
	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Anfangswertproblem $U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s+p)$

1. Ordnung

$u' + pu = f, \quad p \in \mathbb{R}$

nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$

Anfangswertproblem

2. Ordnung

$u'' + pu' + qu = f, \quad p, q \in \mathbb{R}$

$U/\Phi - (s+p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2 + ps + q)$

nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$

$\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$

λ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$



6.6 Sturm-Liouville-Probleme

Selbstadjungierter
Differentialoperator

$$Lu = -(pu')' + qu$$

Transformation auf
selbstadjungierte Form

$$\begin{aligned} au'' + bu' + cu &= f, \quad a(x) \neq 0 \\ \text{Multiplikation mit } -p/a &\text{ ergibt } -(pu')' + qu = g \text{ mit} \\ p(x) &= \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right), \\ q(x) &= -c(x)p(x)/a(x), \\ g(x) &= -f(x)p(x)/a(x). \end{aligned}$$

Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} L\psi &= \lambda \varrho \psi \text{ mit Randbedingungen} \\ \alpha_0 \psi(a) + \alpha_1 \psi'(a) &= 0, \quad \beta_0 \psi(b) + \beta_1 \psi'(b) = 0 \\ \psi &\text{ hei\ss} \text{t Eigenfunktion, } \lambda \text{ Eigenwert} \end{aligned}$$

Selbstadjungiertes
Eigenwertproblem

Eigenwerte sind reell
Eigenfunktionen zum gleichen Eigenwert sind linear abhängig
Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind ϱ -orthogonal
Eigenwerte bilden streng monotone Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

7 Vektoranalysis

7.1 Differentiation

Gradient	$\text{grad } U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)^t$ $\text{grad } \vec{F} = (\text{grad } F_x, \text{grad } F_y, \text{grad } F_z)^t$
Divergenz	$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$
Rotation	$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}, \quad (\text{rot } \vec{F})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$ ebener Fall: $\text{rot } \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$
Laplace-Operator	$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U$
Rechenregeln	alle Operatoren sind linear $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$ $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ $\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$ $\text{grad}(U V) = U \text{grad } V + V \text{grad } U$ $\text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\text{grad } \vec{F})^t \vec{G} + (\text{grad } \vec{G})^t \vec{F}$ $\text{div}(U \vec{F}) = U \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U$ $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$ $\text{rot}(U \vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$

Zylinderkoordinaten

$$(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \Psi_z \vec{e}_z$$

$$\text{grad } U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \Phi) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \partial_z \Psi_z$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_z - \partial_z \Psi_\varphi \right) \vec{e}_\varrho + (\partial_z \Psi_\varrho - \partial_\varrho \Psi_z) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\varrho} (\partial_\varrho (\varrho \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\varrho) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Axialsymmetrische
Felder Φ bzw. Ψ hängen nur von $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ab

$$\text{grad } \Phi = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \Phi)$$

$$\text{div}(\Psi \vec{e}_\varrho) = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \Psi)$$

$$\text{rot}(\Psi \vec{e}_\varrho) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\Psi \vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\text{rot}(\Psi \vec{e}_\varphi) = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \Psi) \vec{e}_z$$

Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_r \vec{e}_r + \Psi_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{grad } U = \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi)$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\vartheta) \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi \Psi_r - \sin \vartheta \partial_r (r \Psi_\varphi)) \vec{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r} (\partial_r (r \Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta \Psi_r) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Radialsymmetrische
Felder

Φ bzw. Ψ hängen nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ab

$$\text{grad } \Phi = \partial_r \Phi \vec{e}_r$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi)$$

$$\text{div}(\Psi \vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi)$$

$$\text{rot}(\Psi \vec{e}_r) = \vec{0}$$

7.2 Integration

Parametrisierung Kurve $C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t)$
 Fläche $S : D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$

Kurvenintegral
$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

Arbeitsintegral
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Flächenintegral
$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Flussintegral
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Fluss durch Funktionsgraph
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy, \quad z = f(x, y)$$

Fluss durch Zylindermantel
$$\varrho = \varrho(\varphi) : \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho dz d\varphi$$

$$\varrho = \varrho(z) : \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho dz d\varphi$$

speziell $2\pi a(z_{\max} - z_{\min})f(a)$ für $\vec{F} = f(\varrho)\vec{e}_\varrho$ mit $\varrho = a$

Fluss durch Kugeloberfläche
$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \quad \text{mit } r = a$$

speziell $4\pi a^2 f(a)$ für $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$

vektorielle
Kurvenintegrale

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \left(\int_C F_x, \int_C F_y, \int_C F_z \right)^t$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}'(t) dt = \left(\begin{array}{l} \int_C (F_y dz - F_z dy) \\ \int_C (F_z dx - F_x dz) \\ \int_C (F_x dy - F_y dx) \end{array} \right)$$

vektorielle
Flächenintegrale

$$\iint_S \vec{F} dS = \left(\iint_S F_x dS, \iint_S F_y dS, \iint_S F_z dS \right)^t$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}) \vec{n}^\circ dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \times \vec{n}^\circ dS$$

Satz von Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{grad} U dV = \iint_S U d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{F} dV = - \iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

Satz von Green

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W) dV$$

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U) dV$$

Satz von Stokes

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$- \iint_S (\operatorname{grad} U) \times d\vec{S} = \int_C U d\vec{r}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

Skalares Potential	Skalarfeld U mit $\text{grad } U = \vec{F}$ notwendige Bedingung für Existenz: $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$, hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten D
	C ein beliebiger, in D von A nach B verlaufender Weg: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \Rightarrow \text{Wegunabhängigkeit des Integrals}$
Vektorpotential	Vektorfeld \vec{A} mit $\text{rot } \vec{A} = \vec{F}$ notwendige Bedingung für Existenz: $\text{div } \vec{F} = 0$, hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

8 Komplexe Analysis

8.1 Grundfunktionen

Komplexe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy = re^{i\varphi}$

Möbius-Transformation $w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$
 Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet
 Festlegung durch drei Punkte (z_i, w_i) :
 $\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$

Exponentialfunktion $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$

Komplexer Logarithmus $\text{Ln } z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$

Potenzfunktion $z^{p/q} = r^{p/q} \exp(p(\varphi + 2\pi j)/q), \quad j = 0, \dots, q - 1$

8.2 komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann f komplex differenzierbar:
 Differentialgleichungen $f'(z) = f_x(z) = -if_y(z) \Leftrightarrow u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$
 $\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$

konjugiert harmonische Funktion $\Delta u = 0$ auf D einfach zusammenhängend
 $\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0$ und $f = u + iv$ komplex differenzierbar

Isotropie und Winkeltreue Abbildung $z \mapsto w(z)$
 dreht Richtungen um Winkel $\arg f'(z)$
 streckt Längen um Faktor $|f'(z)|$
 Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare Abbildungen	Abbildung	Urbild	Bild
	$w = z^\alpha$	Sektor $0 < \arg z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$
	$w = \frac{z + 1}{iz - i}$ $\Leftrightarrow z = \frac{iw + 1}{iw - 1}$	Einheitskreisscheibe $ z < 1$	obere Halbebene $\text{Im } w > 0$
	$w = e^z$ $\Leftrightarrow z = \text{Ln } w$	Streifen $0 < \text{Im } z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma$

8.3 Integration

Kurvenintegral	$\int_C f dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad C : t \mapsto z(t), \quad t \in [a, b]$
Stammfunktion	f im Gebiet D komplex differenzierbar, C ein in D verlaufender Weg von z_0 nach z_1 : $\int_C f' dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$
Singularitäten	schwache Singularität: $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$ Pol n -ter Ordnung: $ z - a ^{n-1} f(z) \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow a$, $(z - a)^n f(z)$ beschränkt für $z \rightarrow a$ wesentliche Singularität: $(z - a)^n f(z)$ für kein n beschränkt
Cauchys Theorem	f analytisch in D bis auf endlich viele schwache Singularitäten, $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt: $\int_C f(z) dz = 0$
Cauchysche Integralformel	f analytisch, $n(C, z)$ Umlaufzahl von C bzgl. z : $n(C, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$
Integralformel für Ableitungen	f analytisch, $n(C, z) = 1$: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$
Mittelwerteigenschaft	$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$
Maximumprinzip	$\max_{z \in D} f(z) \leq \max_{z \in \partial D} f(z) $

8.4 Residuenkalkül

Residuum	<p>f analytisch in $D \setminus \{a\}$, $C \subset D$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a</p> $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$ <p>einfache Polstelle: $\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$</p> <p>Pol n-ter Ordnung: $\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \left((z-a)^n f(z)\right)$</p>
Residuensatz	<p>C entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D, a_j Singularitäten von f in D:</p> $\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{a_j} f$
Trigonometrische Integranden	<p>$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t) dt$ geht mit der Substitution $z = e^{it}$ über in</p> $\int_{ z =1} f(z) dz, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz}$
Rationale Integranden	<p>f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:</p> $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a f$
Transzendente Integranden	<p>f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad:</p> $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a (f(z)e^{i\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$
Algebraische Integranden	<p>f rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:</p> $\int_0^{\infty} f(x)x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{a \neq 0} \operatorname{Res}_a (f(z)z^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1$



8.5 Potenzreihen

Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

f analytisch in $D : |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Konvergenzradius r : Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

f analytisch in $D : r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um a ohne Singularitäten,

r_1, r_2 : Abstand der begrenzenden Singularitäten zu a

$$r_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} |c_n|^{-1/n}, \quad r_2 = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

8.6 Differentialgleichungen

Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$ ist bei a regulär, wenn q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von a sind.

Entwicklung: $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z-a)^n$

Rekursion: $u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0)$, $n \geq 2$

mit durch Anfangsbedingungen $u_0 = u(a)$ und $u_1 = u'(a)$ eindeutig bestimmten Koeffizienten u_n

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$ hat bei a einen regulären singulären Punkt, wenn $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$ und $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$.

Charakteristische Gleichung: $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

Entwicklung: $u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z-a)^n$, $u_0 \neq 0$

Rekursion: $\varphi(\lambda+n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0)$, $n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische
Differentialgleichung

$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0$, $-c \notin \mathbb{N}_0$

$u(z) = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n$, $(t)_n = t(t+1) \cdots (t+n-1)$

Bessel-
Differentialgleichung

$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$

linear unabhängige Lösungen:

$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$

9 Fourier-Analyse

9.1 Fourier-Reihen

Reelle Fourier-Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1$$

Komplexe Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ mit $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

Umrechnungsformeln für Fourier-Koeffizienten $a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k})$ für $k \geq 1$
 $c_0 = a_0/2, \quad c_k = (a_k - ib_k)/2, \quad c_{-k} = (a_k + ib_k)/2$ für $k \geq 1$

Symmetrien f gerade: $b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad c_k = c_{-k}$

f ungerade: $a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad c_k = -c_{-k}$

Skalarprodukt, Norm $\langle f, g \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f \rangle_{2\pi}$

Fourier-Projektion $(p_n f)(x) = \sum_{|k| \leq n} \langle f, e^{ikt} \rangle_{2\pi} e^{ikx}$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)(x-t))}{\sin((x-t)/2)} f(t) dt$

Konvergenzrate $\|f - p_n f\|_{2\pi} \leq (n+1)^{-k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}$

Parseval-Identität $\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$
 $= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

9.2 Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Matrizen

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0 \cdot 0} & \cdots & w_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1) \cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi i/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n} W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Diskrete
Fourier-Transformation

$$f = W_n c \Leftrightarrow f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk} c_k, \quad j = 0, \dots, n-1$$

Inverse diskrete
Fourier-Transformation

$$c = \frac{1}{n} W_n^* f \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj} f_j, \quad k = 0, \dots, n-1$$

9.3 Fourier-Transformation

Fourier-Transformation $\hat{f} = \mathcal{F}f, \quad \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$

Inverse
Fourier-Transformation $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy$

Transformationsregeln

Linearität $af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$

Symmetrie $\hat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$

Konjugation $\overline{f(x)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\hat{f}(-y)}$

Skalierung $f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y/a)/|a|$

Verschiebung $f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ia y} \widehat{f}(y)$
 $e^{ia x} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-a)$

Differentiation $\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (iy)^n \widehat{f}(y)$
 $(-ix)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \widehat{f}(y)$

Faltung $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$
 $f(x)g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y-\tau)\widehat{g}(\tau) d\tau$

Spezielle Funktionen	f	\widehat{f}
	1	$2\pi\delta(y)$
	1 für $x \in [-a, a]$, 0 sonst	$2a \operatorname{sinc}(ay)$
	$\operatorname{sign}(x)$	$2/(iy)$
	$e^{-a x }$	$2a/(a^2 + y^2)$
	e^{-ax^2}	$\sqrt{\pi/a} e^{-y^2/(4a)}$

Satz von Plancherel $2\pi\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle, \sqrt{2\pi}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2 dy\right)^{1/2}$

Poisson-Summationsformel $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi l)$

Heisenbergs Unschärfeprinzip $\|x f\| \|y \widehat{f}\| \geq \frac{1}{2} \|f\| \|\widehat{f}\|$

Rekonstruktionssatz Hat f Bandbreite h , d.h. $\widehat{f}(y) = 0$ für $|y| > h$, dann gilt $f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j\pi/h) \operatorname{sinc}(hx - j\pi)$.

9.4 Multivariate Fourier-Transformation

Fourier-Transformation $\hat{f} = \mathcal{F}f, \quad \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-iy^t x} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$

Inverse Fourier-Transformation $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{iy^t x} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Transformationsregeln

Linearität $af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$

Symmetrie $\hat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$

Transformation $f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} |\det(A)|^{-1} \hat{f}((A^{-1})^t y), \quad \det(A) \neq 0$

Verschiebung $f(x - v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-iv^t y) \hat{f}(y)$
 $\exp(iv^t x) f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y - v)$

Differentiation $\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|} y^\alpha \hat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
 $x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{f}(y)$

Faltung $(f \star g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y)\hat{g}(y)$

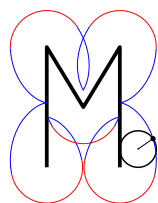
Spezielle Funktionen	f	\hat{f}
	1 für $x \in [-a, a]^n, 0$ sonst	$(2a)^n \text{sinc}(ay_1) \cdots \text{sinc}(ay_n)$
	$\exp(- x)$	$\frac{2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2)}{(1+ y ^2)^{(n+1)/2}}$
	$\exp(- x ^2/2)$	$(2\pi)^{n/2} e^{- y ^2/2}$

Norminvarianz $(2\pi)^{n/2} \|f\| = \|\hat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 dy \right)^{1/2}$









<http://www.mathematik-online.org/>