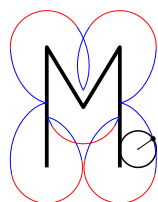
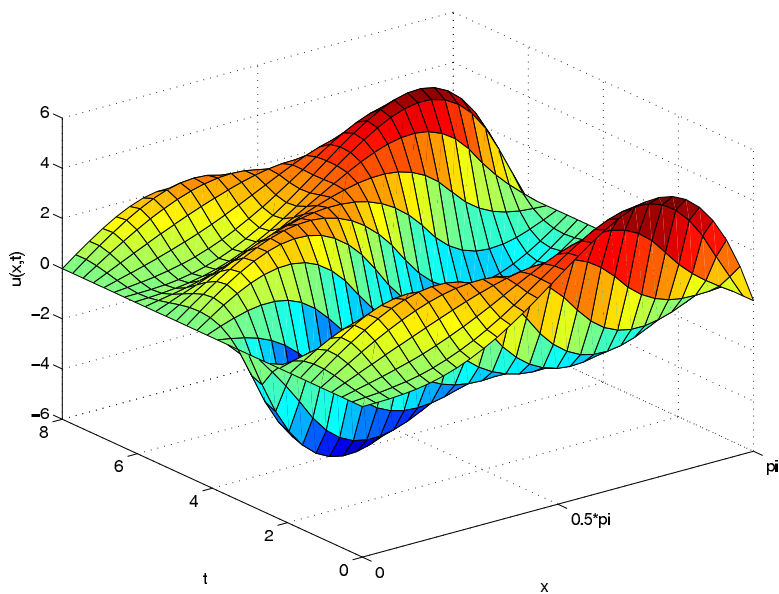


Mathematik–Online–Kurs

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN



<http://www.mathematik-online.org/>



Mathematik–Online–Kurs

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

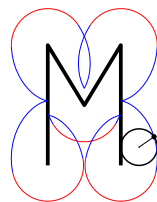
Stand: 4. April 2011

Konzipiert von K. Höllig und W. Kimmerle unter Mitwirkung von
M. Boßle, A. Fuchs, C. Höfert, M. Knödler und P. Martsch

© 2011 **Mathematik-Online**

Diese Veröffentlichung ist urheberrechtlich geschützt.

Weder Mathematik-Online noch einer der Autoren übernehmen Haftung für die Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit oder Qualität dieser Veröffentlichung. Haftungsansprüche, welche sich auf Schäden materieller oder ideeller Art beziehen, die durch die Nutzung oder Nichtnutzung der dargebotenen Informationen bzw. durch die Nutzung fehlerhafter und unvollständiger Informationen verursacht wurden, sind grundsätzlich ausgeschlossen.



<http://www.mathematik-online.org/>



Vorwort

Diese Broschüre wurde im Rahmen des Projektes „Mathematik Online“ begleitend zu dem entsprechenden Kursmodul erstellt. Sie richtet sich an Studenten der Ingenieur- und Naturwissenschaften und ist insbesondere zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung geeignet.

An der Entwicklung des Kurses haben eine Reihe unserer Mitarbeiter und Studenten mitgewirkt. Wir danken insbesondere J. Hörner für die technische Leitung, M. Boßle, Dr. A. Fuchs, C. Höfert, M. Knödler und P. Martsch für die Ausarbeitung der mathematischen Grundlagen.

Die gemeinsame Arbeit an dem Projekt hat uns viel Freude bereitet, und wir wünschen den Lesern viel Spaß mit „Mathematik Online“ und Erfolg in ihrem Studium.

Stuttgart, im März 2006

Klaus Höllig

Wolfgang Kimmerle





Inhaltsverzeichnis

1	Klassifikation	9
1.1	Partielle Differentialgleichung	9
1.2	System partieller Differentialgleichungen	10
1.3	Lineare partielle Differentialgleichung	11
1.4	Separationsansatz	11
1.5	Lineares System partieller Differentialgleichungen	13
1.6	Typ einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung	14
2	Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	15
2.1	Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung	15
2.2	Eulers partielle Differentialgleichung	17
2.3	Cauchy-Problem für eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung	18
2.4	Charakteristische Kurven einer quasi-linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung	19
2.5	Cauchy-Problem für quasi-lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung	19
2.6	Burgers Gleichung	20
3	Poisson-Gleichung	21
3.1	Fundamentallösung der Poisson-Gleichung in der Ebene	21
3.2	Poisson-Formel für eine Kreisscheibe	22
3.3	Fundamentallösung der Poisson-Gleichung im Raum	24
3.4	Greensche Funktion der Poisson-Gleichung	24
3.5	Poisson-Formel für eine Kugel	26
3.6	Maximumprinzip	27
3.7	Eigenwertproblem für den Laplace-Operator	28
3.8	Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Einheitskreisscheibe	28
3.9	Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Einheitskugel	29
4	Wellengleichung	31
4.1	Allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung	31
4.2	Funktionalgleichung der eindimensionalen Wellengleichung	32
4.3	Cauchy-Problem für die eindimensionale Wellengleichung	33
4.4	Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Wellengleichung	34
4.5	Darboux-Gleichung der sphärischen Mittel	36
4.6	Cauchy-Problem für die dreidimensionale Wellengleichung	37
5	Wärmeleitungsgleichung	41
5.1	Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung	41
5.2	Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung	42



Kapitel 1

Klassifikation

1.1 Partielle Differentialgleichung

Eine partielle Differentialgleichung für eine skalare Funktion u auf einem Gebiet D ,

$$u(x, y, \dots), \quad (x, y, \dots) \in D,$$

ist eine Beziehung zwischen den partiellen Ableitungen:

$$f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots, \dots) = 0 .$$

Im allgemeinen ist u reell und $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Es können jedoch auch komplexe partielle Differentialgleichungen betrachtet werden.

Die Ordnung einer partiellen Differentialgleichung ist die höchste Ordnung der auftretenden partiellen Ableitungen.

Beispiel:

Im folgenden werden einige Beispiele partieller Differentialgleichungen verschiedener Ordnung gegeben.

Burgers Gleichung,

$$u_t + uu_x = 0 ,$$

hat die Ordnung 1. Sie modelliert beispielsweise die Verkehrsdichte $u(x, t)$ auf einer Straße.

Die Schrödinger-Gleichung,

$$i\hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - Vu = 0 ,$$

hat die Ordnung 2. Sie resultiert aus der quantenmechanischen Beschreibung der Bewegung eines Teilchens mit Masse m in einem Potential V . Dabei bezeichnet $2\pi\hbar$ die Plancksche Konstante.

Die Korteweg-DeVries-Gleichung,

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0 ,$$

ist eine Gleichung der Ordnung 3, die zuerst bei der Beobachtung von Wasserwellen entdeckt wurde.

Beispiel:

Die partielle Differentialgleichung

$$uu_{xy} + u_x u_y - x = 0$$

hat die Ordnung 2. Schreibt man sie in der Form

$$(u^2)_{xy} = 2x,$$

so erhält man die allgemeine Lösung durch zweifache Integration:

$$\begin{aligned} (u^2)_x &= 2xy + \varphi(x) \\ u^2 &= x^2y + \Phi(x) + \Psi(y) \end{aligned}$$

mit beliebigen Funktionen $\Phi(x) = \int \varphi(x) dx$ und Ψ .

1.2 System partieller Differentialgleichungen

Ein System partieller Differentialgleichungen besteht aus mehreren partiellen Differentialgleichungen für eine oder mehrere Funktionen

$$f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots, \dots) = 0,$$

mit $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $u = (u_1, \dots, u_n)$. Insbesondere entspricht der Spezialfall $m = n = 1$ einer partiellen Differentialgleichung für eine skalare Funktion.

Die Ordnung eines Systems partieller Differentialgleichungen ist die höchste Ordnung der auftretenden partiellen Ableitungen.

Beispiel:

Im folgenden werden einige Beispiele von Systemen partieller Differentialgleichungen verschiedener Ordnung gegeben.

Die Navier-Stokes-Gleichungen,

$$\begin{aligned} u_t + (u \operatorname{grad})u - \gamma \Delta u &= -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned}$$

beschreiben die viskose Strömung eines inkompressiblen Fluids. Dabei bezeichnen $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ das Strömungsfeld, p den Druck und die Konstanten ϱ, γ die Dichte bzw. die Viskosität des Fluids. Das System besteht aus 4 Differentialgleichungen und hat die Ordnung 2.

Für ein kompressibles Fluid gelten die Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_t + \operatorname{div}(\varrho u) &= 0 \\ (\varrho u)_t + \operatorname{div}(\varrho u u) + \operatorname{grad} p &= 0 \\ E_t + \operatorname{div}(u(E + p)) &= 0, \end{aligned}$$

mit ϱ der (variablen) Dichte und E der totalen Energie. Dieses System hat die Ordnung 1.

1.3 Lineare partielle Differentialgleichung

Eine lineare partielle Differentialgleichung der Ordnung m für eine skalare Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ hat die Form

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x) .$$

Hängen die Koeffizienten a_α und die rechte Seite f nicht nur von der Variablen x sondern auch von partiellen Ableitungen niedrigerer Ordnung ab,

$$Lu = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x; \partial^\beta u, |\beta| < m) \partial^\alpha u = f(x; \partial^\beta u, |\beta| < m) ,$$

so spricht man von einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung.

Beispiel:

Im folgenden werden einige Beispiele linearer partieller Differentialgleichungen verschiedener Ordnung gegeben.

Die Poisson-Gleichung,

$$-\Delta u = f ,$$

ist die wohl wichtigste partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Für $f = 0$ werden ihre Lösungen auch als Potentiale oder harmonische Funktionen bezeichnet.

Die Wärmeleitungsgleichung,

$$u_t - k\Delta u = 0 \quad (k > 0) ,$$

beschreibt die Wärmeausbreitung in einem Körper konstanter Dichte.

Die Wellengleichung,

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \quad (c > 0) ,$$

beschreibt die Ausbreitung von Schallwellen in Röhren ($n = 1$), Oberflächenwellen in flachem Wasser ($n = 2$) und die Ausbreitung von Schall- und Lichtwellen ($n = 3$).

Die Plattengleichung,

$$\Delta^2 u = f ,$$

beschreibt die Auslenkung einer am Rand eingespannten Platte. Dabei bezeichnet f die Dichte einer senkrecht auf die Platte wirkenden Kraft.

1.4 Separationsansatz

Für eine partielle Differentialgleichung der Form

$$L_x u(x, y) = L_y u(x, y)$$

mit L_x (L_y) einem Differentialoperator, der nur auf die x - (y -) Variable wirkt, können spezielle Lösungen mit Hilfe des Ansatzes

$$u(x, y) = v(x)w(y)$$

konstruiert werden. Durch die Produktform werden die Variablen getrennt:

$$(L_x v)w = v(L_y w) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L_x v(x)}{v(x)} = \frac{L_y w(y)}{w(y)}$$

für $u \neq 0$. Da man in den Quotienten die Variablen x und y unabhängig voneinander variieren kann, müssen beide Quotienten konstant sein. Bezeichnet man diese sogenannte Separationskonstante mit λ , so erhält man die Eigenwertprobleme

$$L_x v = \lambda v, \quad L_y w = \lambda w.$$

Analog kann man für lineare partielle Differentialgleichungen in mehr als zwei Variablen vorgehen.

Beispiel:

Für die Wellengleichung

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$$

liefert der Separationsansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$

$$w'' = \lambda w, \quad c^2 v'' = \lambda v.$$

Je nach Vorzeichen von $\lambda \in \mathbb{R}$ sind mehrere Fälle zu unterscheiden.

(i) $\lambda = \varrho^2 > 0$:

$$w = c_1 e^{\varrho t} + c_2 e^{-\varrho t}, \quad v = d_1 e^{(\varrho/c)x} + d_2 e^{-(\varrho/c)x}$$

(ii) $\lambda = 0$:

$$w = c_1 + c_2 t, \quad v = d_1 + d_2 x$$

(iii) $\lambda = -\varrho^2 < 0$:

$$w = c_1 \cos(\varrho t) + c_2 \sin(\varrho t), \quad v = d_1 \cos\left(\frac{\varrho}{c} x\right) + d_2 \sin\left(\frac{\varrho}{c} x\right).$$

Durch Einsetzen verifiziert man, dass die so konstruierten Lösungen tatsächlich die Wellengleichung erfüllen.

Beispiel:

Für die elliptische Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + 2u_y - u = 0$$

führt der Separationsansatz

$$u(x, y) = v(x)w(y)$$

auf

$$v''w + vw'' - 2vw' - vw = 0.$$

Schließt man die triviale Lösung $u = 0$ aus, so folgt nach Division durch vw

$$\frac{v''}{v} = -\frac{w''}{w} + \frac{2w'}{w} - 1 = \lambda.$$

Je nach Vorzeichen der Separationskonstanten λ sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Für zusätzlich gestellte Randbedingungen

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(0) = v(\pi) = 0$$

ergibt sich folgendes. Nur für $\lambda = -n^2 < 0$ existieren nichttriviale Lösungen

$$v(x) = c \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt

$$w'' - 2w' + (1 - n^2)w = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w(y) = d_1 e^{(1+n)y} + d_2 e^{(1-n)y}.$$

1.5 Lineares System partieller Differentialgleichungen

Ein lineares System von l partiellen Differentialgleichungen der Ordnung m für eine Funktion

$$u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))^t$$

hat die Form

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x)$$

mit $(l \times n)$ -Matrizen A_α .

Hängen die Koeffizienten A_α und die rechte Seite f nicht nur von der Variablen x sondern auch von partiellen Ableitungen niedrigerer Ordnung ab,

$$Lu = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x; \partial^\beta u, |\beta| < m) \partial^\alpha u = f(x; \partial^\beta u, |\beta| < m),$$

so spricht man von einem quasilinearen System partieller Differentialgleichungen.

Beispiel:

Im folgenden werden einige Beispiele von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen verschiedener Ordnung gegeben.

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

sind ein lineares System erster Ordnung. Die Lösungen dieses Systems sind sogenannte konjugiert harmonische Funktionen u und v , die Real- und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

bilden.

Die Navier-Lamé-Gleichungen

$$\varrho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u), \quad i = 1, 2, 3,$$

beschreiben Schwingungen in einem elastischen Material. Es handelt sich hierbei um ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, wobei $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ die Komponenten des Verschiebungsvektors, ϱ die Dichte und λ, μ die Lamé Konstanten des elastischen Materials bezeichnen.

Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum,

$$\begin{aligned}\varepsilon E_t - \operatorname{rot} H &= 0 \\ \mu H_t + \operatorname{rot} E &= 0 \\ \operatorname{div} E = \operatorname{div} H &= 0 ,\end{aligned}$$

eines elektrischen Feldes $E = (E_1, E_2, E_3)^t$ und magnetischen Feldes $H = (H_1, H_2, H_3)^t$ bilden ein System von 6 Gleichungen erster Ordnung.

1.6 Typ einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

Eine partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u(x) + cu(x) = f(x) , \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

mit konstanten Koeffizienten $A = (a_{ij})$ heißt

- elliptisch, wenn alle Eigenwerte von A gleiches Vorzeichen haben
- parabolisch, wenn mindestens ein Eigenwert von A null ist, und die von Null verschiedenen Eigenwerte gleiches Vorzeichen haben
- hyperbolisch, wenn A Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen besitzt.

Hängen die Koeffizienten a_{ij} von x ab, so muss die entsprechende Bedingung für alle $x \in D$ erfüllt sein. Ist dies nicht der Fall, so spricht man von einer partiellen Differentialgleichung gemischten Typs.

Beispiel:

Für die Wellengleichung $u_{xx} = c^2 u_{yy}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} ,$$

sie ist also hyperbolisch.

Die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ist elliptisch, denn

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Wärmeleitungsgleichung $u_x - u_{yy} = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist parabolisch.

Kapitel 2

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

2.1 Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

Für die partielle Differentialgleichung

$$u_t + a^t \operatorname{grad}_x u = \alpha u + f$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen a_ν, α, f von $n + 1$ Variablen (x_1, \dots, x_n, t) bezeichnet man die durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\xi'(t) = a(\xi(t), t)$$

definierten Kurven $t \mapsto \xi(t)$ als Charakteristiken. Entlang dieser Kurven genügt eine stetig differenzierbare Lösung

$$p(t) = u(\xi(t), t)$$

der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$p'(t) = \alpha(\xi(t), t)p(t) + f(\xi(t), t),$$

d.h. sie kann aus einem Anfangswert $p(t_0)$ an der Stelle $(\xi(t_0), t_0)$ durch Integration berechnet werden.

Ist sowohl α als auch f gleich 0, so ist die Lösung entlang der Charakteristiken konstant. Es muß dann nur das System gewöhnlicher Differentialgleichungen für $\xi(t)$ gelöst werden.

Beweis:

Für eine stetig differenzierbare Lösung u ist nach der Kettenregel

$$p' = u_t + \xi' \operatorname{grad}_x u = u_t + a(\xi, t)^t \operatorname{grad}_x u,$$

was aufgrund der partiellen Differentialgleichung mit der rechten Seite der gewöhnlichen Differentialgleichung für p übereinstimmt.

Beispiel:

Für die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0 \quad (c > 0)$$

sind die Charakteristiken Geraden:

$$\xi'(t) = c \quad \Rightarrow \quad g: x = \xi(t) = \xi(t_0) + c(t - t_0).$$

Da die Differentialgleichung homogen ist, gilt

$$p'(t) = \frac{d}{dt}u(\xi(t), t) = 0,$$

d.h. die Lösung ist entlang einer charakteristischen Geraden konstant:

$$u(\underbrace{\xi(t)}_x, t) = u(\underbrace{\xi(0)}_{x-ct}, 0) = \varphi(x - ct).$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph der Anfangswerte φ mit Geschwindigkeit c nach rechts wandert.

Beispiel:

Im Fall konstanter Koeffizienten ($a_\nu \in \mathbb{R}$) sind die Charakteristiken Geraden. Beispielsweise folgt für

$$u_t - 2u_x - 3u_y = e^{x+y}$$

dass

$$\begin{aligned} \xi' &= -2 & \Rightarrow & \xi(t) = \xi_0 - 2t \\ \eta' &= -3 & \Rightarrow & \eta(t) = \eta_0 - 3t \end{aligned}$$

und

$$p'(t) = e^{\xi_0 - 2t + \eta_0 - 3t} \quad \Rightarrow \quad p(t) = p_0 - \frac{1}{5}e^{\xi_0 + \eta_0 - 5t}$$

mit $p_0 = \varphi(\xi_0, \eta_0)$ dem Wert der Lösung an der Stelle $(\xi_0, \eta_0, 0)$.

Damit gilt

$$u(\xi_0 - 2t, \eta_0 - 3t, t) = \varphi(\xi_0, \eta_0) - \frac{1}{5}e^{\xi_0 + \eta_0 - 5t}$$

bzw.

$$u(x, y, t) = \varphi(x + 2t, y + 3t) - \frac{1}{5}e^{x+y}$$

mit einer beliebigen stetig differenzierbaren Funktion φ .

Beispiel:

Für die partielle Differentialgleichung

$$u_t + xu_x = -u + xt$$

lautet die Differentialgleichung für die Charakteristiken:

$$\xi' = \xi.$$

Folglich ist $\xi(t) = \xi_0 e^t$, und für die Lösung $p(t) = u(\xi(t), t)$ entlang einer charakteristischen Kurve gilt

$$p' = -p + \xi_0 e^t t,$$

d.h.

$$p(t) = \left(-\frac{\xi_0}{4} + \frac{\xi_0}{2} t\right) e^t + \left(p_0 + \frac{\xi_0}{4}\right) e^{-t}$$

mit $p_0 = \varphi(\xi(0))$ dem Wert von u an der Stelle $(\xi(t_0), t_0) = (\xi_0, 0)$.

Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$u(\xi_0 e^t, t) = \left(-\frac{\xi_0}{4} + \frac{\xi_0}{2} t\right) e^t + \left(\varphi(\xi_0) + \frac{\xi_0}{4}\right) e^{-t} \Leftrightarrow u(x, t) = -\frac{x}{4} + \frac{x}{2} t + \left(\varphi(xe^{-t}) + \frac{x}{4} e^{-t}\right) e^{-t}$$

mit φ einer beliebigen stetig differenzierbaren Funktion.

2.2 Eulers partielle Differentialgleichung

Eulers partielle Differentialgleichung

$$x^t \operatorname{grad} u = \alpha u, \quad \alpha \neq 0,$$

charakterisiert die homogenen Funktionen der Ordnung α , d.h. die Lösungen $u(x_1, \dots, x_n)$ erfüllen die Funktionalgleichung

$$u(rx) = r^\alpha u(x), \quad x \neq 0, r > 0,$$

sind also insbesondere durch ihre Werte auf der Einheitssphäre $S : |x| = 1$ eindeutig festgelegt.

Beweis:

Definiert man für Eulers Differentialgleichung Charakteristiken durch

$$\xi'(t) = \xi(t),$$

so gilt für $p(t) = u(\xi(t))$

$$p'(t) = \operatorname{grad} u(\xi(t)) \xi'(t) = \alpha u(\xi(t)) = \alpha p(t).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\xi(t) = \xi(0) e^t, \quad p(t) = p(0) e^{\alpha t}.$$

Mit $x = \xi(0)$ und $r = e^t$ folgt daraus

$$u(rx) = p(t) = r^\alpha p(0) = r^\alpha u(x).$$

2.3 Cauchy-Problem für eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

Das Cauchy-Problem

$$u_t + a^t(x, t) \operatorname{grad}_x u = \alpha(x, t)u + f(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen a_ν, α, f von $n + 1$ Variablen (x_1, \dots, x_n, t) besitzt in der Umgebung jedes Punktes $(x, 0)$ eine eindeutige Lösung. Entlang der von $(x, 0)$ ausgehenden Charakteristik kann sie durch Integration der charakteristischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= a(\xi(t), t), & \xi(0) &= x \\ p'(t) &= \alpha(\xi(t), t)p(t) + f(\xi(t), t), & p(0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

bestimmt werden: $u(\xi(t), t) = p(t)$.

Beispiel:

Für das Cauchy-Problem

$$u_t + tu_x = xu, \quad u(x, 0) = 1$$

lauten die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \xi' &= t, & \xi(0) &= x \\ p' &= \xi p, & p(0) &= 1. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\xi(t) = x + \frac{1}{2}t^2, \quad p(t) = \exp\left(xt + \frac{1}{6}t^3\right)$$

d.h.

$$u(\xi, t) = \exp\left(\underbrace{\left(\xi - \frac{1}{2}t^2\right)}_x t + \frac{1}{6}t^3\right) = \exp(\xi t - t^3/3).$$

Nach Umbenennung der Variablen kann man die Gültigkeit der Differentialgleichung durch eine Probe bestätigen:

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_t \exp(xt - t^3/3) = (x - t^2)u \\ tu_x &= \partial_u \exp(xt - t^3/3) = tt u \end{aligned}$$

Addition der beiden Terme ergibt die rechte Seite xu .

Beispiel:

Für das Cauchy-Problem

$$u_t + (x - y)u_x + (x + y)u_y = 0, \quad u(x, y, 0) = xy$$

lauten die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi - \eta & , & & \xi(0) &= x \\ \eta' &= \xi + \eta & , & & \eta(0) &= y \\ p' &= 0 & , & & p(0) &= xy\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned}\xi(t) &= e^t(x \cos t - y \sin t) \\ \eta(t) &= e^t(y \cos t + x \sin t) \\ p(t) &= xy.\end{aligned}$$

Aus $p(t) = u(\xi(t), \eta(t), t) = xy$ folgt dann durch Auflösen der Gleichungen für ξ und η nach x und y

$$\begin{aligned}u(\xi, \eta, t) &= (e^{-t}(\xi \cos t + \eta \sin t))(e^{-t}(-\xi \sin t + \eta \cos t)) \\ &= e^{-2t}((\eta^2 - \xi^2) \cos t \sin t + \xi\eta(\cos^2 t - \sin^2 t)).\end{aligned}$$

2.4 Charakteristische Kurven einer quasi-linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

Für die partielle Differentialgleichung

$$u_t + a^t(x, t, u) \operatorname{grad}_x u = f(x, t, u)$$

für $u(x_1, \dots, x_n, t)$ mit stetig differenzierbaren Funktionen a_ν und f bezeichnet man die durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\xi'(t) = a(\xi(t), t, p(t)), \quad p'(t) = f(\xi(t), t, p(t))$$

definierten Kurven $t \mapsto (\xi(t), t, p(t))$ als charakteristische Kurven. Sie liegen auf dem Graph einer stetig differenzierbaren Lösung. Entlang dieser Kurven kann $p(t) = u(\xi(t), t)$ aus einem Anfangswert $p(t_0)$ durch Integration berechnet werden.

Ist $f = 0$ und hängt a nur von u ab, so sind die charakteristischen Kurven Geraden, entlang derer $u = p$ einen konstanten Wert hat.

2.5 Cauchy-Problem für quasi-lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

Das Cauchy-Problem

$$u_t + a(x, t, u)^t \operatorname{grad}_x u = f(x, t, u), \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen a und f besitzt in der Umgebung jedes Punktes $(x, 0)$ eine eindeutige Lösung, die durch Integration der charakteristischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\xi'(t) &= a(\xi(t), t, p(t)), & \xi(0) &= x \\ p'(t) &= f(\xi(t), t, p(t)), & p(0) &= \varphi(x)\end{aligned}$$

bestimmt werden kann: $u(\xi(t), t) = p(t)$.

2.6 Burgers Gleichung

Die Lösung des Cauchy-Problems

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ist entlang der charakteristischen Geraden

$$t \mapsto (x + \varphi(x)t, t)$$

konstant:

$$u(\xi, t) = u(x), \quad \xi = x + \varphi(x)t.$$

Sie existiert für stetig differenzierbare Anfangswerte φ im klassischen Sinne für

$$0 \leq t < -1 / \inf_{x \in \mathbb{R}} \varphi'(x)$$

und ist in impliziter Form durch

$$u(\xi, t) = \varphi(\xi - tu(\xi, t))$$

gegeben.

Beweis:

Die Differentialgleichung für die charakteristischen Geraden $t \mapsto (\xi(t), t)$ hat die Form

$$\xi'(t) = \varphi(\xi), \quad \xi(0) = x.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\xi = x + \varphi(x)t.$$

Da die Lösung entlang der charakteristischen Geraden konstant ist, $u(\xi, t) = \varphi(x)$, erhält man durch Auflösen nach x

$$u(x + \varphi(x)t, t) = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad u(\xi, t) = \varphi(\xi - tu(\xi, t)).$$

Schließlich führt ein Schnittpunkt charakteristischer Geraden zu einem Widerspruch bei der Lösungsdarstellung:

$$u(\xi, t) = \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) = u(\xi, t).$$

Ein Schnittpunkt existiert genau dann, wenn φ nicht monoton wachsend ist, d.h., wenn

$$s = \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

für zwei Punkte x_j . Man erhält dann aus

$$x_1 + t\varphi(x_1) = x_2 + t\varphi(x_2)$$

$t = -1/s$ als zweite Koordinate des Schnittpunktes. Eine glatte Lösung existiert also nur auf dem Streifen

$$D : 0 \leq t < -1 / \inf_{x \in \mathbb{R}} \varphi'(x).$$

Man kann den Lösungsbegriff erweitern, so dass eine globale, sogenannte schwache Lösung existiert. Dies erfordert jedoch eine Reihe zusätzlicher Überlegungen.

Kapitel 3

Poisson-Gleichung

3.1 Fundamentallösung der Poisson-Gleichung in der Ebene

Die Funktion

$$\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad r = |(x_1, x_2)|$$

ist eine Fundamentallösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

d.h. es gilt

$$\Delta \frac{1}{2\pi} \ln r = 0, \quad r \neq 0,$$

und

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \ln |x - y| f(y) dy$$

für jede glatte Funktion u mit kompaktem Träger.

Beweis:

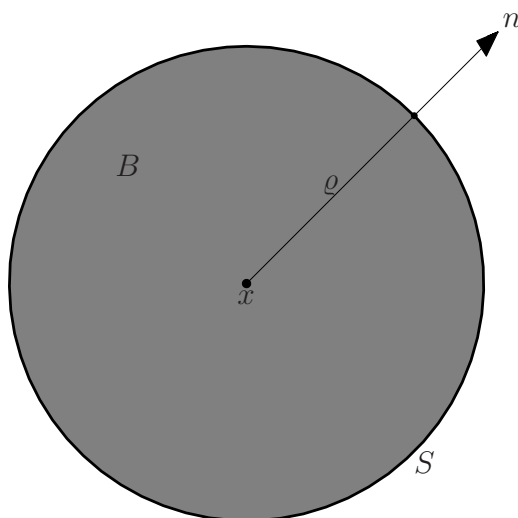
Für eine radial symmetrische Funktion $v(x) = \varphi(r)$ hat der Laplace-Operator die Form

$$\Delta v = \frac{1}{r} (r\varphi_r)_r = \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r.$$

Damit folgt $\Delta \ln r = 0$ für $r > 0$.

Zum Beweis der Integralformel sei B eine Kreisscheibe um x mit Radius ϱ und $S = \partial B$ der

Rand von B mit äußerer Einheitsnormalen $n = (y - x)/|y - x|$.



Mit partieller Integration erhält man für das 2π -fache des Doppelintegrals in der Formel für $u(x)$

$$\begin{aligned} & \iint_B \ln|x - y|f(y) dy + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B} \ln|x - y|f(y) dy \\ &= \iint_B \ln|x - y|f(y) dy + \int_S \ln|x - y|(-n^t)\text{grad } u(y) dy - \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B} \frac{(y - x)^t}{|y - x|^2} \text{grad } u(y) dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

da $f = \text{div grad } u$ und $\text{grad } \ln r = \frac{1}{r}e_r$ mit e_r dem radialen Einheitsvektor. Nochmalige partielle Integration ergibt

$$I_3 = - \int_S \frac{(y - x)^t}{|y - x|^2} (-n)u(y) dy$$

wegen

$$\text{div}_y \frac{y - x}{|y - x|^2} = \Delta_y \ln|y - x| = 0.$$

Für $\varrho \rightarrow 0$ streben I_1 und I_2 gegen Null:

$$|I_1| \leq \text{const} \int_0^\varrho \ln r r dr, \quad |I_2| \leq \text{const } \varrho \ln \varrho,$$

und

$$I_3 = \int_S \frac{1}{\varrho} u(y) dy$$

konvergiert gegen $2\pi u(x)$.

3.2 Poisson-Formel für eine Kreisscheibe

Eine auf einer Kreisscheibe

$$B : r = |(x, y)| < R$$

harmonische und auf \bar{B} stetige Funktion u lässt sich in Polarkoordinaten in eine Fourier-Reihe

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik\varphi}$$

entwickeln. Die Koeffizienten erhält man aus den Randwerten:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi') e^{-ik\varphi'} d\varphi'.$$

Somit ergibt sich in Polarkoordinaten die Integraldarstellung

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \varphi') + r^2} u(R, \varphi') d\varphi'.$$

Als Spezialfall erhält man für $r = 0$ die sogenannte Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen:

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi') d\varphi'.$$

Aus der Poisson-Formel folgt, dass harmonische Funktionen im Inneren ihres Definitionsgebietes unendlich oft differenzierbar sind. Desweiteren gilt das Maximumprinzip:

$$|u(r, \varphi)| \leq \max_{\varphi'} |u(R, \varphi')|.$$

Beweis:

Der Laplace-Operator hat in Polarkoordinaten die Form

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2.$$

Angewandt auf die Basisfunktionen $r^{|k|} e^{ik\varphi}$ erhält man

$$|k|(|k| - 1)r^{|k|-2} e^{ik\varphi} + \frac{1}{r} |k| r^{|k|-1} e^{ik\varphi} - \frac{1}{r^2} k^2 e^{ik\varphi} = 0.$$

Formal erfüllt also die Reihe die Laplace-Gleichung. Ebenfalls formal ergibt sich die Übereinstimmung mit den Randwerten für $r = R$ nach Definition der Fourier-Koeffizienten. Zum Beweis der Integraldarstellung muss gezeigt werden, dass

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \varphi') + r^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik(\varphi - \varphi')}$$

Mit $\Theta = \varphi - \varphi'$ und der Formel für eine geometrische Reihe erhält man für die rechte Seite

$$-1 + \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{-i\Theta}} + \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{i\Theta}}.$$

Vereinfachung dieses Ausdrucks ergibt die linke Seite.

3.3 Fundamentallösung der Poisson-Gleichung im Raum

Die Funktion

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad r = |(x_1, x_2, x_3)|,$$

ist eine Fundamentallösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

d.h. es gilt

$$\Delta \frac{1}{r} = 0, \quad r \neq 0,$$

und

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy.$$

für jede glatte Funktion u mit kompaktem Träger.

Beweis:

Mit Hilfe der Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten folgt unmittelbar

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{\partial_r}{r^2} (r^2 \partial_r) \frac{1}{r} = 0$$

für $r \neq 0$. Zur Herleitung der Integraldarstellung betrachtet man eine Kugel K_ϱ um x mit Radius ϱ , Rand S_ϱ und nach innen zeigender Einheitsnormalen n . Für y aus $D_\varrho = \mathbb{R}^3 \setminus K_\varrho$ gilt wegen

$$\operatorname{grad}_y \frac{1}{|y-x|} = -\frac{y-x}{|y-x|^3}, \quad \Delta_y \frac{1}{|y-x|} = 0$$

nach der zweiten Greenschen Integralformel und da $u(y)$ für großes $|y|$ verschwindet

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iiint_{D_\varrho} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varrho} n^t \left(\frac{\operatorname{grad} u}{\varrho} - u \left(\frac{n}{\varrho^2} \right) \right) dS \\ &= I_1 - I_2, \end{aligned}$$

denn für $y \in S_\varrho$ ist $1/|y-x| = 1/\varrho$ und $\operatorname{grad}_y 1/|y-x| = n/\varrho^2$. Da u als glatt vorausgesetzt wurde, lässt sich $|I_1|$ durch

$$\frac{1}{4\pi} (4\pi \varrho^2) \frac{\operatorname{const}}{\varrho} = O(\varrho)$$

abschätzen. Das Integral I_2 strebt für $\varrho \rightarrow 0$ gegen $-u(x)$. Somit folgt die behauptete Integraldarstellung.

3.4 Greensche Funktion der Poisson-Gleichung

Die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } D$$

mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $D \subseteq \mathbb{R}^3$ hat die Form

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \varphi(x, y) ,$$

wobei Φ eine Fundamentallösung und $\varphi(x, \cdot)$, $x \in D$, eine auf \bar{D} harmonische Funktion ist mit den gleichen Randwerten wie Φ , d.h.

$$G(x, y) = 0, \quad y \in S = \partial D ,$$

für $x \in D$.

Mit Hilfe der Greenschen Funktion lässt sich eine Lösung der Poisson-Gleichung in der Form

$$u(x) = \iiint_D G(x, y) f(y) dy + \iint_S u(y) n^t \operatorname{grad}_y G(x, y) dy$$

mit n der äußeren Einheitsnormalen von S darstellen.

Es folgt insbesondere, dass eine glatte Lösung u der Poisson-Gleichung durch f und die Randwerte von u auf S eindeutig bestimmt ist.

Beweis:

Es wird nur der Fall $D \subseteq \mathbb{R}^3$ betrachtet. Die Argumentation für zwei Variablen verläuft analog. Wendet man die zweite Greensche Integralformel

$$\iiint_D u \Delta v - v \Delta u = \iint_S n^t (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u)$$

auf die Funktionen u und $v = \varphi(x, \cdot)$ an, so folgt wegen $\Delta_y \varphi(x, y) = 0$

$$0 = \iiint_D \varphi(x, y) \Delta u(y) dy + \iint_S n^t (u(y) \operatorname{grad}_y \varphi(x, y) - \varphi(x, y) \operatorname{grad} u(y)) dy. \quad (*)$$

Andererseits gilt für die Fundamentallösung Φ

$$\begin{aligned} u(x) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \Phi(x - y) \Delta u(y) dy \\ &= \iiint_D \dots + \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus D} \Phi(x - y) \Delta u(y) - u(y) \underbrace{\Delta_y \Phi(x - y)}_{= 0} dy \\ &= \iiint_D \dots + \iint_S (-n^t) (\Phi(x - y) \operatorname{grad} u(y) - u(y) \operatorname{grad}_y \Phi(x - y)) dy \end{aligned}$$

wiederum nach der zweiten Greenschen Integralformel. Subtrahiert man von dieser Gleichung die Gleichung (*), so erhält man wegen

$$\Phi(x - y) = \varphi(x, y), \quad y \in S ,$$

die behauptete Integraldarstellung.

3.5 Poisson-Formel für eine Kugel

Eine in einer Kugel

$$B : r = |(x_1, x_2, x_3)| < R$$

mit Oberfläche S harmonische und auf \bar{B} stetige Funktion u besitzt die Integraldarstellung

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} u(y) dy, \quad |x| < R.$$

Insbesondere gilt die Mittelwerteigenschaft

$$u(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(y) dy.$$

Aus der Poisson-Formel folgt, daß harmonische Funktionen im Inneren ihres Definitionsgebietes unendlich oft differenzierbar sind. Desweiteren gilt das Maximumprinzip:

$$\min_{|y|=R} u(y) \leq u(x) \leq \max_{|y|=R} u(y), \quad |x| \leq R.$$

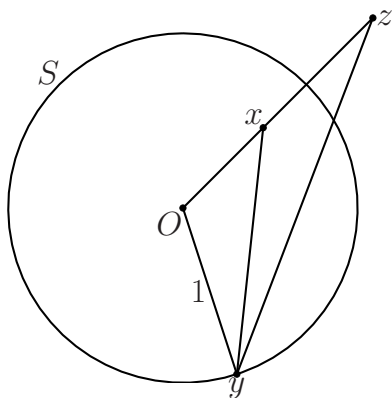
Beweis:

Zunächst kann man sich nach einer Skalierung der Variablen $x \leftarrow x/R$ auf den Fall $R = 1$ beschränken, d.h. auf den Beweis der Identität

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^3} u(y) dy$$

mit $|x| < 1$.

Die Herleitung beruht auf der Konstruktion einer Greenschen Funktion mit Hilfe der in der Abbildung illustrierten geometrischen Eigenschaft der Kugeloberfläche S .



$$z = \frac{x}{|x|^2} \Rightarrow \frac{|y - z|}{|y - x|} = \frac{1}{|x|}, \quad y \in S$$

Der Grund hierfür ist die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle(y, O, z)$ und $\triangle(x, O, y)$.

Man setzt nun

$$G(x, y) = \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}}_{\Phi(x-y)} - \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} \frac{1}{|z-y|}$$

und bemerkt, dass $\varphi(\cdot, y)$ wegen $z \notin D$ harmonisch ist und $G(x, y) = 0$ für $y \in S$ aufgrund der geometrischen Überlegung. Folglich ist G eine Greensche Funktion für B und für eine harmonische Funktion gilt

$$u(x) = \iint_S u(y) n^t \operatorname{grad}_y G(x, y) dy,$$

wobei die äußere Einheitsnormale n im Punkt y gleich y ist.

Es bleibt die explizite Form von $y^t \operatorname{grad}_y G(x, y)$ bestimmen. Hierzu berechnet man zunächst

$$\operatorname{grad}_y G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{y-x}{|x-y|^3} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} \frac{y-z}{|z-y|^3}.$$

Berücksichtigt man $|z-y|^3 = |x-y|^3/|x|^3$, $y^t y = 1$ und $y^t x = |x|^2 y^t z$, so folgt die behauptete Form.

3.6 Maximumprinzip

Eine auf einem Gebiet D harmonische und auf \bar{D} stetige Funktion u nimmt ihr Maximum auf dem Rand S von D an:

$$u(x) \leq \max_{y \in S} u(y), \quad x \in D.$$

Gilt die Gleichheit für ein $x \in D$, so ist u konstant.

Eine analoge Aussage gilt für das Minimum von u .

Beweis:

Man setzt $m = \sup_{x \in D} u(x)$ und zerlegt D in die disjunkten Mengen

$$D_{<} : u(x) < m, \quad D_{=} : u(x) = m.$$

Aufgrund der Stetigkeit von u ist $D_{<}$ offen. Dies lässt sich auch für $D_{=}$ zeigen. Ist $x \in D_{=}$, d.h. $u(x) = m$, und wäre $u(y) < m$ für ein y in einer Kugel $B \subset D$ mit Mittelpunkt x , so ergibt sich aus der Mittelwerteigenschaft der Widerspruch

$$m = u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y'-x|=r} u(y') dy' < m, \quad r = |x-y|.$$

Da $D = D_{<} \cup D_{=}$ zusammenhängend und offen ist, folgt, dass entweder $D_{<}$ oder $D_{=}$ leer ist. Im ersten Fall ist u konstant, im zweiten wird das Maximum von u nur auf dem Rand angenommen.



3.7 Eigenwertproblem für den Laplace-Operator

Für ein beschränktes Gebiet D mit glattem Rand ∂D besitzt das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \text{ in } D, \quad u = 0 \text{ auf } \partial D,$$

Eigenfunktionen u_n , $n \in \mathbb{N}$, zu Eigenwerten $\lambda_n > 0$, die ein vollständiges Orthonormalsystem im Raum $L_2(D)$ der quadratisch integrierbaren Funktionen bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_D fg$$

bilden.

Für $f \in L_2(D)$ besitzt jede Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ mit homogenen Randbedingungen die Orthogonalentwicklung

$$u = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle f, u_n \rangle u_n.$$

3.8 Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Einheitskreisscheibe

Das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \quad (r < 1), \quad u = 0 \quad (r = 1),$$

auf der Einheitskreisscheibe $D : r = |(x_1, x_2)| < 1$ besitzt die Eigenfunktionen

$$u_{k,n}(r, \varphi) = J_{|k|}(\mu_{|k|,n} r) e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

mit $\mu_{|k|,n} > 0$ den Nullstellen der Bessel-Funktion $J_{|k|}$. Die entsprechenden Eigenwerte sind $\lambda_{k,n} = \mu_{|k|,n}^2$.

Die Funktionen $u_{k,n}$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem im Raum $L_2(D)$ der auf D quadratintegrierbaren Funktionen bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_D fg.$$

Insbesondere besitzt jede Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ die Entwicklung

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_{k,n}} \frac{\langle f, u_{k,n} \rangle}{\langle u_{k,n}, u_{k,n} \rangle} u_{k,n}.$$

Beweis:

Die Positivität der Eigenwerte λ folgt mit Hilfe von partieller Integration:

$$\lambda \iiint_D u^2 = - \iiint_D u \Delta u = \iiint_D |\text{grad } u|^2 > 0,$$

da $u = 0$ auf dem Rand von D .

In Polarkoordinaten hat das Eigenwertproblem für den Laplace-Operator die Form

$$-\frac{1}{r}(ru_r)_r - \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \mu^2 u \quad (r < 1), \quad u(1, \varphi) = 0 \quad (-\pi < \varphi \leq \pi),$$

mit $\lambda = \mu^2 > 0$. Der Separationsansatz

$$u(r, \varphi) = v(r)w(\varphi)$$

führt nach Multiplikation dieser Differentialgleichung mit $\frac{r^2}{vw}$ auf

$$\frac{r(rv_r)_r + \mu^2 r^2 v}{v} = -\frac{w_{\varphi\varphi}}{w} = \gamma.$$

Nicht triviale (2π) -periodische Lösungen w existieren nur für $\gamma = k^2$:

$$w(\varphi) = e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mit dieser Wahl ist

$$r^2 v_{rr} + rv_r + (\mu^2 r^2 - k^2)v = 0.$$

Diese Bessel-Differentialgleichung hat die für $r = 0$ reguläre Lösung

$$v(r) = J_{|k|}(\mu r).$$

Aus der Randbedingung $J_{|k|}(\mu) = 0$ für $r = 1$ erhält man somit die behauptete Form der Eigenfunktionen.

Es bliebe noch zu zeigen, dass keine Eigenfunktionen existieren, die nicht Produktform haben. Dann folgt die Reihendarstellung der Lösung aus dem allgemeinen Entwicklungssatz für Eigenwertprobleme.

3.9 Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Einheitskugel

Das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \quad (r < 1), \quad u = 0 \quad (r = 1),$$

auf der Einheitskugel $D : r = |(x_1, x_2, x_3)| < 1$ besitzt die Eigenfunktionen

$$u_{k,n,m}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{J_{n+1/2}(\mu_{n,m} r)}{\sqrt{r}} P_{n,|k|}(\cos \vartheta) e^{ik\varphi}, \quad |k| \leq n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N},$$

mit $\mu_{n,m} > 0$ den Nullstellen der Bessel-Funktion $J_{n+1/2}$. Die entsprechenden Eigenwerte sind $\lambda_{n,m} = \mu_{n,m}^2$.

Die Funktionen $u_{k,n,m}$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem im Raum $L_2(D)$ der auf D quadratintegrierbaren Funktionen bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_D fg.$$

Insbesondere besitzt jede Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ die Entwicklung

$$u = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{|k| \leq n} \frac{1}{\lambda_{n,m}} \frac{\langle f, u_{k,n,m} \rangle}{\langle u_{k,n,m}, u_{k,n,m} \rangle} u_{k,n,m}.$$

Beweis:

In Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) hat das Eigenwertproblem die Form

$$\frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta}(\sin \vartheta u_{\vartheta})_{\vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} u_{\varphi\varphi} = -\mu^2 u,$$

da $\lambda > 0$. Der Separationsansatz $u = v(r)p(\vartheta)q(\varphi)$ liefert nach Multiplikation mit r^2 und Division durch u

$$\frac{(r^2 v_r)_r + \mu^2 r^2 v}{v} = -\frac{\frac{1}{\sin \vartheta}(\sin \vartheta p_{\vartheta})_{\vartheta}}{p} - \frac{\frac{1}{\sin^2 \vartheta} q_{\varphi\varphi}}{q} = \gamma.$$

Aus der zweiten Gleichheit folgt

$$\frac{\sin \vartheta (\sin \vartheta p_{\vartheta})_{\vartheta} + \gamma \sin^2 \vartheta p}{p} = -\frac{q_{\varphi\varphi}}{q} = \gamma',$$

und aufgrund der Periodizität in φ erhält man $\gamma' = k^2$, d.h.

$$q(\varphi) = e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nach der Substitution

$$t = \cos \vartheta, \quad p(\vartheta) = P(t), \quad p_{\vartheta} = -\sin \vartheta P_t,$$

wird damit aus der Differentialgleichung für p

$$-\sin^2 \vartheta (-\sin^2 \vartheta P_t)_t + \gamma \sin^2 \vartheta P = k^2 P,$$

bzw. wegen $\sin^2 \vartheta = 1 - t^2$ nach Division durch $\sin^2 \vartheta$

$$(1 - t^2)P_{tt} - 2tP_t + \left(\gamma - \frac{k^2}{1 - t^2}\right)P = 0.$$

Diese Legendre-Differentialgleichung besitzt für $\gamma = n(n+1)$ die bei $t = \pm 1$ ($\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$) regulären Legendre-Funktionen $P_{n,|k|}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $|k| \leq n$, als Lösungen. Schließlich erhält man für v die Differentialgleichung

$$(r^2 v_r)_r - n(n+1)v + \mu^2 r^2 v = 0$$

mit der bei $r = 0$ regulären Lösung

$$\frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(\mu r).$$

Aus der Randbedingung $J_{n+1/2}(\mu) = 0$ für $r = 1$ ergibt sich somit die behauptete Form der Eigenfunktionen.

Es bliebe noch zu zeigen, dass keine Eigenfunktionen existieren, die nicht Produktform haben. Dann folgt die Reihendarstellung der Lösung aus dem allgemeinen Entwicklungssatz für Eigenwertprobleme.

Kapitel 4

Wellengleichung

4.1 Allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

mit beliebigen zweimal differenzierbaren Funktionen φ und ψ .

Beweis:

Die partielle Differentialgleichung lässt sich durch die Variablen-Transformation

$$u(x, t) = v(\xi, \eta), \quad \xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

vereinfachen. Man erhält wegen $\xi_t = -\eta_t = c$

$$\begin{aligned} u_t &= cv_\xi - cv_\eta \\ u_{tt} &= c^2 v_{\xi\xi} + c^2 v_{\eta\eta} - 2c^2 v_{\xi\eta} \end{aligned}$$

und analog aufgrund von $\xi_x = \eta_x = 1$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\xi\eta}.$$

Somit ergibt sich

$$v_{\xi\eta} = 0,$$

und zweifache Integration liefert

$$\begin{aligned} v_\xi &= \tilde{\varphi}(\xi) \\ v &= \varphi(\xi) + \psi(\eta) \end{aligned}$$

mit φ einer Stammfunktion von $\tilde{\varphi}$. Die Lösung u hat also die gewünschte Form.

4.2 Funktionalgleichung der eindimensionalen Wellengleichung

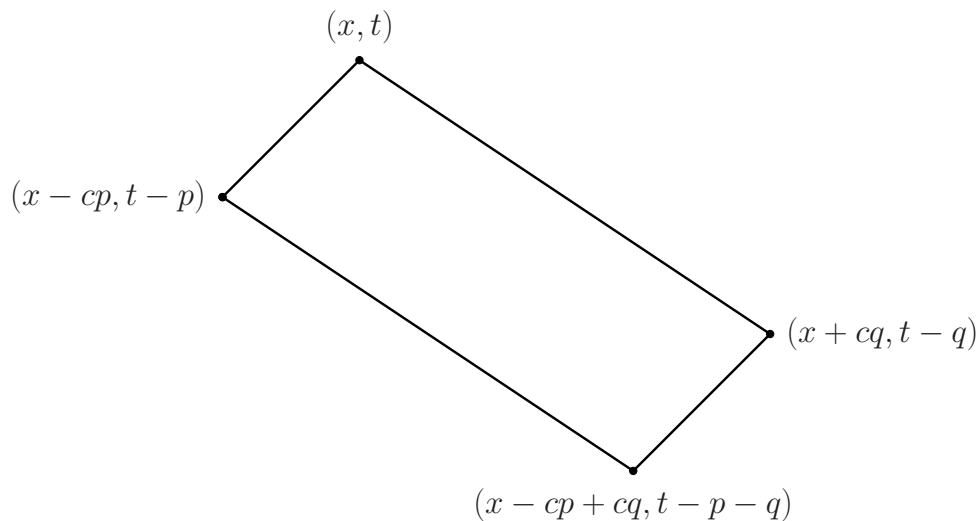
Jede Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

erfüllt die Funktionalgleichung

$$u(x, t) = u(x - cp, t - p) + u(x + cq, t - q) - u(x - cp + cq, t - p - q)$$

für alle $p, q \in \mathbb{R}$.



Die Seiten des charakteristischen Parallelogramms haben die Steigung $\pm c$:

$$\Delta x = \pm c \Delta t,$$

d.h. c kann als Ausbreitungsgeschwindigkeit interpretiert werden.

Beweis:

Die Funktionalgleichung folgt unmittelbar aus der Darstellung

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

der allgemeinen Lösung.

Beispiel:

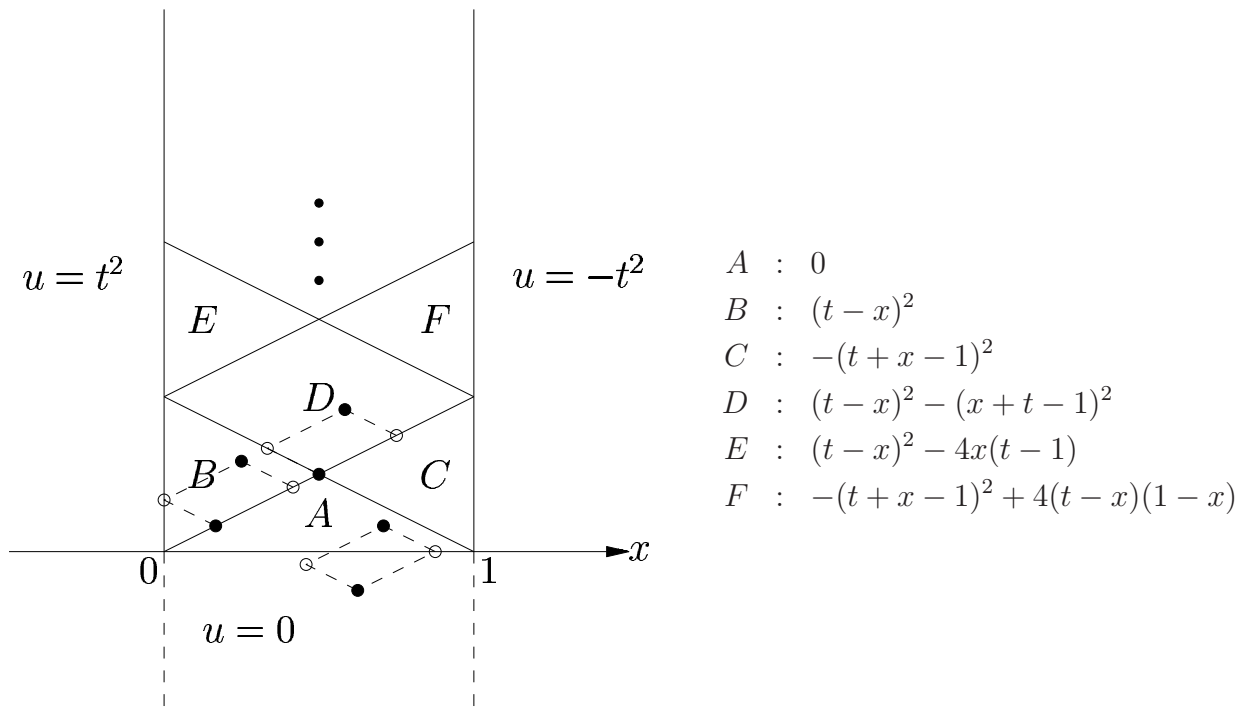
Zur Illustration der Funktionalgleichung wird die Lösung der Wellengleichung mit $c = 1$ auf einem Streifen

$$D : 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

zu den Daten

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0, & t \leq 0 \\ u(0, t) &= t^2, \quad u(1, t) = -t^2, & t \geq 0 \end{aligned}$$

konstruiert.



Die Anwendung der Funktionalgleichung ist durch die gestrichelten Parallelogramme symbolisiert. Beispielsweise erhält man für (x, t) in dem mit B bezeichneten Dreieck

$$u(x, t) = u(0, t-x) + u\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) - u\left(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = (t-x)^2 + 0 - 0.$$

4.3 Cauchy-Problem für die eindimensionale Wellengleichung

Die Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

für die Anfangswerte

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= a(x) \\ u_t(x, 0) &= b(x) \end{aligned}$$

lässt sich in der Form

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(a(x+ct) + a(x-ct)) + \frac{1}{2c}[B]_{x-ct}^{x+ct}$$

darstellen, wobei B eine Stammfunktion von b ist.

Beweis:

Ausgehend von der Darstellung

$$u(x, t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$



für die allgemeine Lösung der Wellengleichung erhält man

$$\begin{aligned} a(x) &= \varphi(x) + \psi(x) \\ b(x) &= c\varphi'(x) - c\psi'(x) \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}a(x) + \frac{1}{2c}B(x) \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}a(x) - \frac{1}{2c}B(x) \end{aligned}$$

mit $B' = b$ und liefert somit die gewünschte Formel. Die Wahl der Integrationskonstante ist ohne Bedeutung, da die Summe von φ und ψ gebildet wird.

Beispiel:

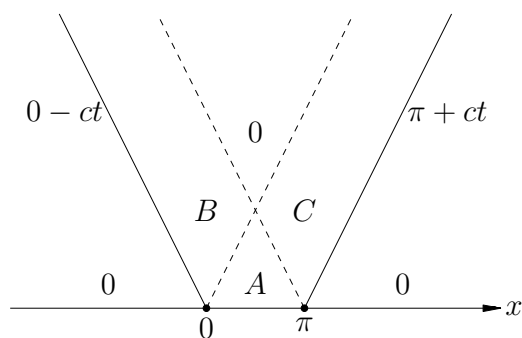
Für $u_t(x, 0) = 0$ hat die Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

die Form

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (a(x + ct) + a(x - ct)) ,$$

d.h. sie ergibt sich durch Superposition der um $\pm ct$ verschobenen Anfangswerte.



$$\begin{aligned} A &: (\sin x \cos(ct))^2 + (\cos x \sin(ct))^2 \\ B &: \frac{1}{2} \sin^2(x + ct) \\ C &: \frac{1}{2} \sin^2(x - ct) \end{aligned}$$

Für

$$u(x, 0) = \sin^2 x \chi(x)$$

mit χ der charakteristischen Funktion des Intervalls $[0, \pi]$ veranschaulicht die Abbildung die Konstruktion der Lösung.

4.4 Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

Die Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f , \quad x \in (0, \pi) , \quad t > 0$$

für die Anfangs- und Randwerte

$$u(x, 0) = a(x) \quad u_t(x, 0) = b(x) , \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

lässt sich als Sinus-Reihe darstellen:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \sin(jx)$$

mit

$$u_j(t) = a_j \cos(jct) + \frac{1}{jc} b_j \sin(jct) + \frac{1}{jc} \int_0^t \sin(jc(t-s)) f_j(s) ds ,$$

wobei $a_j, b_j, f_j(t)$ die Sinus-Koeffizienten von a, b und $f(\cdot, t)$ bezeichnen.

Beweis:

Substitution der Sinus-Reihe für u in die Wellengleichung führt nach Koeffizientenvergleich auf die Differentialgleichungen

$$u_j''(t) = -j^2 c^2 u_j(t) + f_j(t) , \quad u_j(0) = a_j , \quad u_j'(0) = b_j .$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation $u_j(t) \rightarrow U_j(s)$ erhält man

$$s^2 U_j - s a_j - b_j = -(jc)^2 U_j + F_j$$

und somit

$$U_j = \frac{1}{s^2 + (jc)^2} (s a_j + b_j + F_j) .$$

Die inverse Laplace-Transformation der einzelnen Terme

$$\frac{s}{s^2 + (jc)^2} \rightarrow \cos(jct), \quad \frac{1}{s^2 + (jc)^2} \rightarrow \frac{1}{jc} \sin(jct),$$

und die Transformationsregel $\Phi_j F_j \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \varphi_j \star f$ für die Faltung zweier Funktionen liefert die gewünschte Darstellung.

Beispiel:

Das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{(R)} \\ u(x, 0) &= a(x) , \quad u_t(x, 0) = 0 && \text{(A)} \end{aligned}$$

beschreibt die Auslenkung $u(x, t)$ einer schwingenden Saite. Die Randbedingungen (R) bedeuten dabei, dass die Saite an den Enden ($x = 0$ und $x = \pi$) fest eingespannt ist. Die Anfangsbedingung (A) beschreibt die anfängliche Auslenkung aus der Ruhelage („Anzupfen“ der Saite).

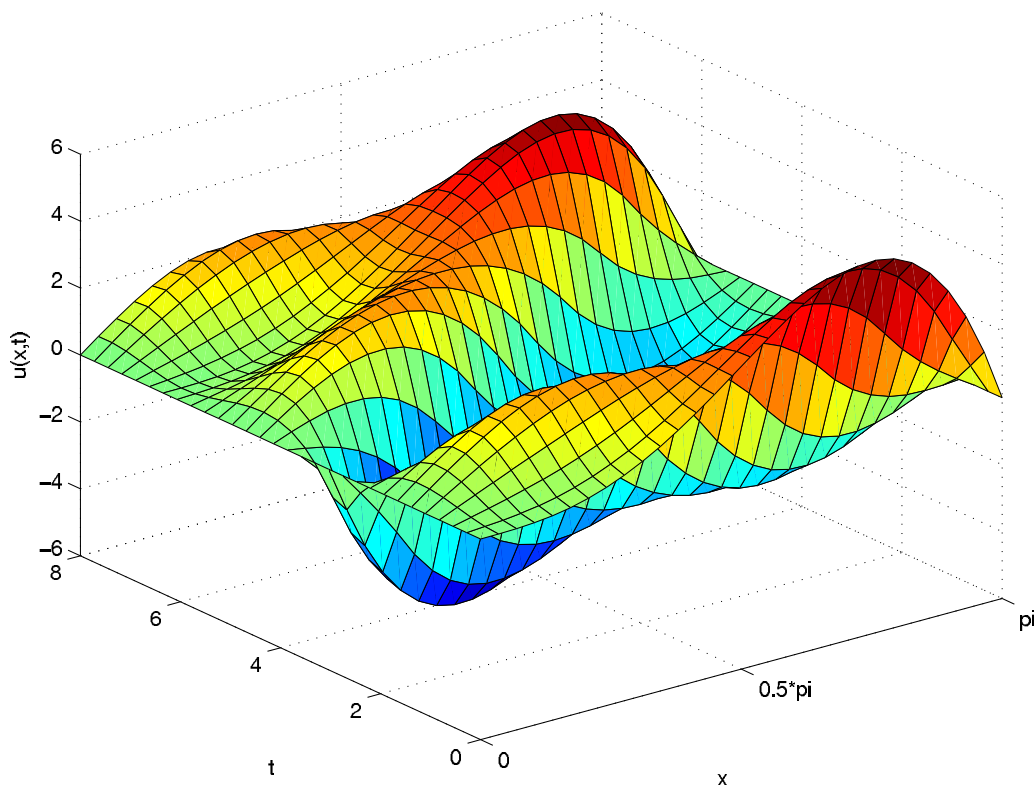
Gemäß der allgemeinen Lösungsformel ist

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jct) \sin(jx)$$

mit

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a(x) \sin(jx) dx$$

den Sinus-Koeffizienten von a .



Die Abbildung zeigt die Lösung für die Anfangswerte $a(x) = x^3(\pi - x)$, die einer mehr zum rechten Ende „angezupften“ Saite entsprechen.

4.5 Darboux-Gleichung der sphärischen Mittel

Die sphärischen Mittel

$$M_u(x, r) = \frac{1}{4\pi} \iint_{|(y_1, y_2, y_3)|=1} u(x + ry) dy$$

einer glatten Funktion $u(x_1, x_2, x_3)$ erfüllen die partielle Differentialgleichung

$$\partial_r(r^2 \partial_r M_u) = \Delta_x(r^2 M_u) .$$

Beweis:

Differentiation von M_u nach r ergibt

$$\partial_r M_u(x, r) = \frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} y^t \text{grad } u(x + ry) dy = \frac{1}{4\pi r} \iint_{|y|=1} y^t \text{grad}_y u(x + ry) dy .$$

Mit dem ersten Greenschen Integralsatz kann man das Flächenintegral in das Volumenintegral

$$\frac{1}{4\pi r} \iiint_{|y|<1} \Delta_y u(x + ry) dy = \frac{r}{4\pi} \Delta_x \iiint_{|y|<1} u(x + ry) dy$$

überführen. Nach Substitution von $ry \rightarrow y$ und Einführung von Polarkoordinaten erhält man

$$\frac{1}{4\pi r^2} \Delta_x \iint_{|y|<r} u(x+y) dy = \frac{1}{4\pi r^2} \Delta_x \int_0^r \varrho^2 \iint_{|y|=1} u(x+\varrho y) dy d\varrho.$$

Damit folgt

$$\partial_r M_u(x, r) = r^{-2} \Delta_x \int_0^r \varrho^2 M_u(x, \varrho) d\varrho,$$

und Multiplikation mit r^2 und Ableiten nach r liefert die gewünschte Differentialgleichung für M .

4.6 Cauchy-Problem für die dreidimensionale Wellengleichung

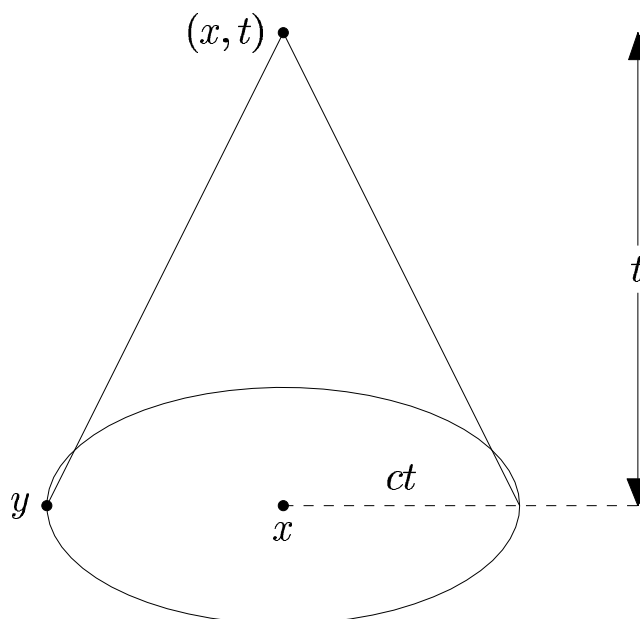
Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta_x u, & x \in \mathbb{R}^3, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= a(x) \\ u_t(x, 0) &= b(x) \end{aligned}$$

lässt sich in der Form

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \iint_{|y-x|=ct} tb(y) + a(y) + (y-x)^t \text{grad } a(y) dy$$

darstellen.



Insbesondere hängt also $u(x, t)$ nur von Werten entlang des abgebildeten Lichtkegels ab.

Beweis:

Der Beweis verläuft in zwei Schritten.

(i) Zunächst wird gezeigt, dass die sphärischen Mittel

$$w(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{|z|=1} u(x + rz, t) dz$$

die eindimensionale Wellengleichung

$$(rw)_{tt} = c^2(rw)_{rr}$$

erfüllen. Dies lässt sich unmittelbar nachrechnen. Wegen

$$\Delta_x w = \frac{1}{4\pi} \iint_{|z|=1} \underbrace{\Delta_x u(x + rz, t)}_{=c^{-2}u_{tt}} dz = \frac{1}{c^2} w_{tt}$$

folgt aus der Darboux-Gleichung für sphärische Mittel

$$rw_{tt} = rc^2 \Delta_x w = \frac{1}{r} c^2 (r^2 w_r)_r = c^2 (rw)_{rr},$$

wie behauptet.

(ii) Durch Anwendung der Lösungsformel für das Cauchy-Problem der eindimensionalen Wellengleichung erhält man

$$\begin{aligned} rw(x, r, t) &= \frac{1}{2} \left[(r + ct)w(x, r + ct, 0) + (r - ct)w(x, r - ct, 0) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \left\{ \int_{r-ct}^{r+ct} sw_t(x, s, 0) ds \right\} \end{aligned}$$

mit $x \in \mathbb{R}^3$ als Parameter. Division durch r und Grenzwertbildung ($r \rightarrow 0$) führt nun auf die Darstellung für $u(x, t)$.

Für den Ausdruck in eckigen Klammern benutzt man, dass

$$w(x, r - ct, 0) = w(x, ct - r, 0)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} [f(ct + r) - f(ct - r)] = f'(ct) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} f(ct) .$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2r} [\dots]$ strebt für $r \rightarrow 0$ also gegen

$$A = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (ctw(x, ct, 0)) .$$

Für den Ausdruck in geschweiften Klammern benutzt man, dass w_t gerade ist und somit das Integral von sw_t über ein symmetrisches Intervall Null ist:

$$\int_{r-ct}^{r+ct} sw_t(x, s, 0) ds = \int_{ct-r}^{ct+r} sw_t(x, s, 0) ds + \underbrace{\int_{r-ct}^{ct-r} sw_t(x, s, 0) ds}_{=0} .$$

4.6. CAUCHY-PROBLEM FÜR DIE DREIDIMENSIONALE WELLENGLEICHUNG

Der Ausdruck $\frac{1}{2cr}\{\dots\}$ strebt also für $r \rightarrow 0$ gegen

$$B = tw_t(x, ct, 0) .$$

Insgesamt ergibt sich

$$u(x, t) = A + B = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{4\pi} \iint_{|z|=1} a(x + ctz) dz \right) + \frac{t}{4\pi} \iint_{|z|=1} b(x + ctz) dz ,$$

wobei

$$\frac{d}{dt}(\dots) = \frac{1}{4\pi} \iint_{|z|=1} a(x + ctz) dz + \frac{t}{4\pi} \iint_{|z|=1} (cz)^t \text{grad } a(x + ctz) dz .$$

Schließlich erhält man durch die Substitution

$$y = x + ctz , \quad dy = (ct)^2 dz$$

die gewünschte Darstellung für $u(x, t)$.

Beispiel:

Für radial symmetrische Anfangswerte

$$u(x, 0) = \varphi(r) , \quad u_t(x, 0) = \psi(r) , \quad r = |x| ,$$

gilt für die Lösung der Wellengleichung im Ursprung

$$\begin{aligned} u(0, 0, 0, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \iint_{|y|=ct} tu_t(y, 0) + u(y, 0) + y^t \text{grad } u(y, 0) dy \\ &= t\psi(ct) + \varphi(ct) + ct\varphi'(ct) . \end{aligned}$$

Fallen ψ oder φ' schwächer als $1/r$ ab, so strebt $u(0, 0, 0, t)$ gegen unendlich. Dieser Effekt wird als Fokussierung bezeichnet. Singularitäten werden durch die Wellengleichung gebündelt.



Kapitel 5

Wärmeleitungsgleichung

5.1 Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_t = \Delta u + f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = a(x)$$

lässt sich in der Form

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) a(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$$

darstellen mit

$$G(z, \tau) = (4\pi\tau)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4\tau}\right).$$

Beweis:

Fourier-Transformation bezüglich x ergibt

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(y, t) &= -|y|^2 \hat{u}(y, t) + \hat{f}(y, t) \\ \hat{u}(y, 0) &= \hat{a}(y)\end{aligned}$$

und nach anschließender Laplace-Transformation erhält man

$$s\hat{U}(y, s) - \hat{a}(y) = -|y|^2 \hat{U}(y, s) + \hat{F}(y, s).$$

Somit folgt

$$\hat{U}(y, s) = \frac{1}{s + |y|^2} \left(\hat{a}(y) + \hat{F}(y, s) \right),$$

und nach inverser Laplace-Transformation erhält man

$$\hat{u}(y, t) = \hat{a}(y) \exp(-|y|^2 t) + \int_0^t \exp(-|y|^2(t - s)) \hat{f}(y, s) ds.$$

Da $G(x, \tau)$ die inverse Fourier-Transformation von $\exp(-|y|^2 \tau)$ ist, ergeben sich die beiden Faltungsintegrale in der Darstellung von u .

5.2 Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} + f, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0$$

für die Anfangs- und Randwerte

$$u(x, 0) = a(x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

lässt sich als Sinus-Reihe darstellen:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \sin(jx)$$

mit

$$u_j(t) = a_j \exp(-j^2 t) + \int_0^t \exp(-j^2(t-s)) f_j(s) ds$$

und

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a(x) \sin(jx) dx, \quad f_j(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, t) \sin(jx) dx$$

den Sinus-Koeffizienten von a und $f(\cdot, t)$.

Beweis:

Setzt man die Reihendarstellung von u in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j'(t) \sin(jx) = \sum_{j=1}^{\infty} -j^2 u_j(t) \sin(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) \sin(jx).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$u_j' = -j^2 u_j + f_j(t), \quad u_j(0) = a_j.$$

Hieraus folgt die behauptete Form der Koeffizienten aus der Lösungsformel für die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Beispiel:

Es soll das Wärmeleitungsproblem

$$v_t = v_{xx} + \underbrace{\sin x e^{-t}}_{f(x, t)}, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 1$$

gelöst werden.

5.2. ANFANGSRANDWERTPROBLEM FÜR DIE EINDIMENSIONALE WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

Aufgrund der inhomogenen Randbedingungen ist zunächst eine Transformation auf Standardform erforderlich. Dazu verwendet man den Ansatz

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{x}{\pi}.$$

Dann erfüllt u dieselbe Differentialgleichung mit den veränderten Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x, 0) = a(x) = -\frac{x}{\pi}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Zur Anwendung der allgemeinen Lösungsformel werden die Sinus-Koeffizienten von a mit f berechnet:

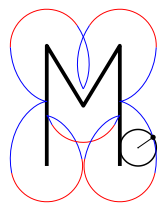
$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -\frac{x}{\pi} \sin(jx) dx = \frac{2}{\pi j} (-1)^j \\ f_j &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x e^{-t} \sin(jx) dx = \delta_{j1} e^{-t}. \end{aligned}$$

Für $j = 1$ ist $f_1(s) = e^{-s}$ und

$$\int_0^t \exp(-(t-s)) e^{-s} ds = t e^{-t}.$$

Somit erhält man

$$u(x, t) = \left(-\frac{2}{\pi} e^{-t} + t e^{-t} \right) \sin x + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2}{\pi j} (-1)^j e^{-j^2 t} \sin(jx).$$



<http://www.mathematik-online.org/>