Mathematik–Online–Kurs

Prüfungsvorbereitung HM 3 für aer, autip, mawi WS10/11

http://www.mathematik-online.org/

Mathematik–Online–Kurs

Prüfungsvorbereitung HM 3 für aer, autip, mawi WS10/11

Stand: 7. Februar 2011

http://www.mathematik-online.org/

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mehrdimensionale Integration

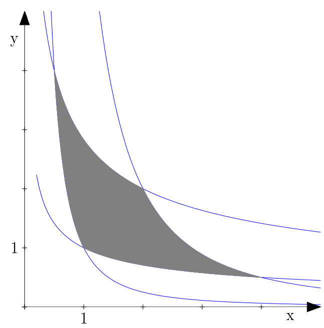
Interaktive Aufgabe 1.1 (Online-Nummer 493):
Koordinatentransformation und zugehörige Funktionaldeterminante, Flächenberechnung

Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\,e^{q} \\ p\,e^{-2q} \end{pmatrix}$$

und der Bereich

$$D:\ 1 \leq x^2 y \leq 8,\ 1 \leq xy^2 \leq 8.$$



a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation Φ.

b) Beschreiben Sie den Bereich D in $pq-$Koordinaten und skizzieren Sie D in der $pq-$Ebene.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

Interaktive Aufgabe 1.2 (Online-Nummer 1641):
Volumen und Oberfläche einer gelochten Kugel

Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius eins, aus der ein zylinderförmiges Loch mit Radius a symmetrisch zum Mittelpunkt herausgebohrt wurde.

Interaktive Aufgabe 1.3 (Online-Nummer 1642):
Schwerpunkt und Flächeninhalt eines Paraboloids

Berechnen Sie den Schwerpunkt S und den Flächeninhalt F des Paraboloids

$$P : z = x^2 + y^2\,, \quad 0 \leq z \leq 1\,.$$

Interaktive Aufgabe 1.4 (Online-Nummer 576):
Fluss verschiedener Vektorfelder durch die Oberfläche eines Zylinders

Gegeben sind das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^z \\ -x\mathrm{e}^z \\ \mathrm{e}^{z\varrho} \end{pmatrix}, \qquad \varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

und der Zylinder

$$K: \quad x^2+y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

mit der Oberfläche S. Berechnen Sie

a) $\operatorname{div}\vec{F}$,

b) den Fluss von $\vec{F}$ durch S nach außen,

c) den Fluss von $\operatorname{rot}\vec{F}$ durch S nach außen.

Interaktive Aufgabe 1.5 (Online-Nummer 466):
Volumen und Fluss durch die Oberfläche eines Körpers

Gegeben sei der Körper $\quad K: \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x, \quad 0 \leq x\,.$

a) Beschreiben Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z).

b) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

c) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F} = (xy^2, yx^2, x^2y^2)^{\mathrm{t}}$ durch die Oberfläche von K von innen nach außen.

Interaktive Aufgabe 1.6 (Online-Nummer 1647):
Arbeitsintegral, Flussintegral, Satz von Stokes

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y\ln(1+z^2) \\ y\arctan x^2 \\ \ln(2+\cos^2 z) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int\limits_{K_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ längs des positiv orientierten Kreises K_1 : $x^2+y^2=4$, $z=3$.

b) Bestimmen Sie den Fluss von $\operatorname{rot}\vec{F}$ durch die Kreisscheibe D mit Rand K_2: $x^2+y^2=4$, $z=0$ nach oben.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von $\operatorname{rot}\vec{F}$ durch den Zylindermantel S: $x^2+y^2=4$, $0\leq z\leq 3$ nach außen.

Kapitel 2

Differentialgleichungen

Interaktive Aufgabe 2.1 (Online-Nummer 575):
Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, Anfangswertprobleme

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' = (2x-5)y, \quad y(3) = 1$ **b)** $y' = \dfrac{y^2}{x(2x-1)}, \quad y(1) = -1/2$

c) $y' = 2y + 5\sin x, \quad y(0) = 2$

Interaktive Aufgabe 2.2 (Online-Nummer 326):
Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, Anfangswertprobleme

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ folgender Differentialgleichungen

a) $y' = \dfrac{xy^2}{1+x^2},\ y(0) = 1$

b) $y'(2y+x) + y = 0,\ y(0) = a > 0$

c) $y' + 2y = \cos x,\ y(0) = y(2\pi)$

Aufgabe 2.3 (Online-Nummer 661):
Differentialgleichung erster Ordnung, integrierender Faktor

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$1 + xy = (x^2 + x^3 y)y', \qquad x > 0.$$

Ermitteln Sie dazu einen integrierenden Faktor mit einem möglichst einfachen Ansatz ($\mu = \mu(x)$ oder $\mu = \mu(y)$).

Interaktive Aufgabe 2.4 (Online-Nummer 1443):
Inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, Variation der Konstanten, Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{-4e^{3x}}{1+e^{2x}}$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.
Geben Sie auch die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 2 + \ln 4$ und $y'(0) = 4 + \ln 16$ an.

Aufgabe 2.5 (Online-Nummer 646):
Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen $u(t)$ der folgenden Differentialgleichungen.

a) $u'' - u = e^{2t}$ **b)** $u'' - 2u' + u = 1 + t$ **c)** $u'' + u = 8\cos(t)\cos(2t)$

Interaktive Aufgabe 2.6 (Online-Nummer 655):
Parameterabhängige Differentialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben sei die von dem reellen Parameter α abhängige Differentialgleichung

$$u'' - (1+\alpha)u' + \alpha u = f(t)\,.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(t)$ der homogenen Differentialgleichung ($f(t) = 0$) in Abhängigkeit von α.

b) Berechnen Sie im Fall $\alpha = 0$ die allgemeine Lösung für $f(t) = 4\cos t$. Für welche Anfangswerte von $u(0)$ und $u'(0)$ ist diese Lösung auf $[0,\infty)$ beschränkt?

Interaktive Aufgabe 2.7 (Online-Nummer 654):
Lineares homogenes System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung

Bestimmen Sie für das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A,

b) die allgemeine Lösung $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big)^{\mathrm{t}}$,

c) die Lösung mit $u(0) = (1,0,0)^{\mathrm{t}}$.

Interaktive Aufgabe 2.8 (Online-Nummer 479):
Anfangswertproblem, Laplace-Transformation

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$u'''(t) - u(t) - 1 = 0\ , \quad u(0) = 0,\ u'(0) = u''(0) = 1\ .$$

a) In welche Gleichung geht die Differentialgleichung durch Laplace-Transformation $u(t) \mapsto U(s)$ über?

b) Lösen Sie diese Gleichung nach $U(s)$ auf.

c) Bestimmen Sie durch Rücktransformation die reelle Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems.

Interaktive Aufgabe 2.9 (Online-Nummer 1016):
Lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswerten

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$u_t + 2u_x = 3$$

sowie die Lösung zu der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \sin(x)$.

Kapitel 3

Fourier-Reihen

Interaktive Aufgabe 3.1 (Online-Nummer 1444):
Fourier-Entwicklung einer trigonometrischen Funktion, Reihenwert

Entwickeln Sie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f(x) = \cos(x/3)\,,\ x \in [-\pi, \pi)$ in eine Fourier-Reihe

$$f(x) \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

und bestimmen Sie durch Auswertung an einer geeigneten Stelle

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1}\,.$$

Interaktive Aufgabe 3.2 (Online-Nummer 252):
Komplexe und reelle Fourier-Reihe einer trigonometrischen Funktion, Parseval-Identität

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k, b_k und c_k der reellen und komplexen Fourier-Reihe von $|\cos(x/2)|$ auf $[-\pi, \pi]$. Welchen Wert hat die Summe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \quad ?$$

Kapitel 4

Wahrscheinlichkeitstheorie

Interaktive Aufgabe 4.1 (Online-Nummer 1438):
Ziehen aus zwei Urnen mit 12 Kugeln in drei Farben

In einer Urne befinden sich drei rote und drei grüne Kugeln, in einer zweiten Urne befinden sich drei rote und drei blaue Kugeln.
Aus diesen Urnen wird (ohne zurücklegen) zweimal eine Kugel gezogen, indem zunächst zufällig eine Urne ausgewählt und dann dieser Urne zufällig eine Kugel entnommen wird.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p(A)$ und $p(B)$ folgender Ereignisse:
A: beide Kugeln sind rot.
B: beide Kugeln haben dieselbe Farbe.
Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Wahrscheinlichkeiten $p_2(A)$ und $p_2(B)$ bei einer Ziehung von zwei Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit allen 12 Kugeln.

Interaktive Aufgabe 4.2 (Online-Nummer 1441):
Wahrscheinlichkeit einer Berufskrankheit bei anderen Menschen

Eine Krankheit, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% in der Bevölkerung auftritt, tritt bei einer bestimmten Berufsgruppe gehäuft auf. Dieser Berufsgruppe gehören 5% der Bevölkerung an und dort liegt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Krankheit bei 20%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p tritt die Krankheit bei jemandem auf, der der Berufsgruppe nicht angehört?

Interaktive Aufgabe 4.3 (Online-Nummer 1440):
Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen für einen zufälligen Punkt im Quadrat

Für einen zufällig gewählten Punkt $(x_1, x_2) \in [-1, 1]^2$ sind die Ereignisse
$A: \quad |x_1| + |x_2| \leq 1$
$B: \quad x_1 \leq x_2$
$C: \quad |x_1| \leq |x_2|$
gegeben. Bestimmen Sie, welche der Ereignisse stochastisch unabhängig sind, indem Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse und der möglichen Schnittmengen bestimmen.

Interaktive Aufgabe 4.4 (Online-Nummer 1451):
Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte, stochastische Unabhängigkeit

Sei

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x_1 x_2 & \text{für } x = (x_1, x_2) \in [0,2]^2\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und

$$A: \ \min(x_1, x_2) > 1\,, \quad B: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\,.$$

Bestimmen Sie α so, dass $f_\alpha(x)$ die Dichte einer Zufallsvariablen ist, und bestimmen Sie für diese Dichte die Wahrscheinlichkeiten $p(A)$, $p(B)$ und $p(A \cap B)$.
Sind A und B stochastisch unabhängig?

Interaktive Aufgabe 4.5 (Online-Nummer 1442):
Ausschuss bei der Produktion von TFT-Monitoren

Bei der Herstellung eines TFT-Monitors ist ein Pixel mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/(25 \cdot 2^{16})$ defekt.
Schätzen Sie mit Hilfe der Approximation mit einer Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Monitor mit einer Auflösung von 1280x960 Pixeln mehr als 2 Pixelfehler hat und somit unbrauchbar ist.

Interaktive Aufgabe 4.6 (Online-Nummer 1618):
Schätzung und Konfidenzintervall bei Arbeitslosenzahlen

Zur Analyse der Dauer von Arbeitslosigkeit wird der Zusammenhang zwischen Ausbildungsniveau und Dauer der Arbeitslosigkeit untersucht. Unter 152 Arbeitslosen ohne Ausbildung waren 98 kurzzeitig, 32 mittelfristig und 22 längerfristig arbeitslos.

a) Schätzen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Arbeitsloser ohne Ausbildung kurzfristig, mittelfristig oder langfristig arbeitslos ist und geben Sie für jede der Schätzungen ein (approximatives) 97%-Konfidenzintervall an.

b) Wieviel größer müßte die Stichprobe sein, um die Länge der Konfidenzintervalle zu vierteln?

Interaktive Aufgabe 4.7 (Online-Nummer 1616):
Maximum-Likelihood-Schätzer bei mehreren Bernoulli-Ketten

In einer Bernoulli–Kette mit unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ wird n mal in unabhängiger Folge beobachtet, wann der erste Treffer auftritt; die zugehörigen Versuchsnummern seien $k_1, k_2, ..., k_n$. Modellieren Sie diese Situation in einem geeigneten Produktraum. Welchen Schätzwert liefert das Maximum–Likelihood–Prinzip für p, wenn $n = 5$, $k_1 = 21, k_2 = 25, k_3 = 19, k_4 = 22$ und $k_5 = 20$ gilt?

Kapitel 5

Probeklausuren

Probeklausur 1

(Online-Test Nummer 203)

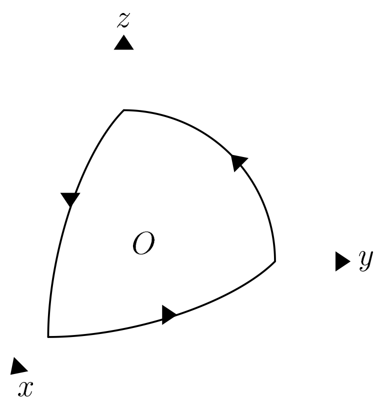
Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \left((xy)^{1+z},\ 0,\ z^{(1+xy)}\right)^{\mathrm{t}}, \qquad x, y, z \geq 0$$

sowie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von $\operatorname{rot} \vec{F}$ durch den im positiven Oktanten liegenden Teil der Kugeloberfläche

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x, y, z \geq 0;$$

in Richtung der äußeren Kugelnormale.



Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ folgender Anfangswertprobleme. Geben Sie an, um welchen Typ es sich handelt.

a) $y' + 2y = e^{3x}, \quad y(0) = 1$

b) $3xy^2\, y' + (y^3 + 2x) = 0, \quad y(2) = 0$

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2x^3y + (3x^2y^2 + x^4)y' = 0$$

Es gibt einen integrierenden Faktor μ, der nur von x abhängt. Bestimmen Sie diesen und geben Sie die allgemeine Lösung in der Form $F(x, y) = k$ an.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

von $f(x) = x(\pi - |x|),\ |x| \leq \pi$. Geben Sie ebenfalls die Koeffizienten $\tilde{a}_k$ und $\tilde{b}_k$ der Stammfunktion $\int_0^x f(y)dy$ an.

Aufgabe 5:
Bei der Züchtung einer blühenden Pflanze erhält man gelbe und weiße Exemplare. Nach den Vererbungsgesetzen muss eine der beiden Farben als dominantes Merkmal mit der Wahrscheinlichkeit 3/4 auftreten. In einem Kreuzungsversuch ergeben sich 11 Pflanzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P irrt man sich, wenn man die häufiger auftretende Farbe für dominant hält?

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(\{k\})$ dafür, dass beim gleichzeitigen Würfeln von 4 (sechsseitigen) Würfeln k Versuche benötigt werden, bis zum ersten mal 4 aufeinanderfolgende Werte geworfen werden.
Berechnen Sie den Erwartungswert E für die benötigte Wurfzahl.

Probeklausur 2

(Online-Test Nummer 204)

Aufgabe 1:
Das Flächenstück

$$S: \ x^2 - 4x + y^2 + 2z = 0 \,, \quad z \geq 0$$

und die xy–Ebene schließen einen Körper K ein.

a) Berechnen Sie das Volumen von K.

b) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z+1) \\ 0 \\ y^2 z + 1 \end{pmatrix}$$

den Fluss von F durch S nach außen.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) + 4u(t) = 4\sin(2t) + 4t^2 + 2 \,.$$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $u(0) = u'(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten der Funktionen

a) $t^2 e^{-3(t+1)}$ **b)** $\sin(2t)\cos(2t)$ **c)** $\max(1-t,\, 0)$

und lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

d) $u' - u = e^t \sin t \,, \quad u(0) = -1 \,.$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$2u_x - 4u_y = 6e^y$$

sowie die Lösung zu der Anfangsbedingung $u(x, 1) = e^x$.

Aufgabe 5:
In einer Urne befinden sich eine rote, eine blaue und eine grüne Kugel.

a) Aus der Urne wird sechsmal eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt.

Sei A das Ereignis, dass bei den ersten drei Ziehungen drei unterschiedliche Farben gezogen werden und B das Ereignis, dass bei den sechs Ziehungen jede Farbe zweimal gezogen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p(A)$, $p(B)$ und $p(B|A)$. Sind die Ereignisse stochastisch unabhängig?

b) Aus der Urne wird 450 mal eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt. Schätzen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 140 und weniger als 161 rote Kugeln gezogen werden. (Es genügt als Ergebnis einen Ausdruck anzugeben, der von einem Funktionswert der Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung abhängt.)

Aufgabe 6:
Seien X und Y zwei stochastisch unabhängige, auf $[0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie für $0 < \alpha \leq \beta$ die Verteilungsfunktion F_Z, die Dichte f_Z und den Erwartungswert $E(Z)$ der Zufallsvariable $Z = \alpha X + \beta Y$.