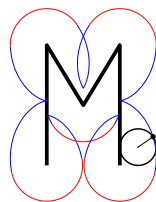
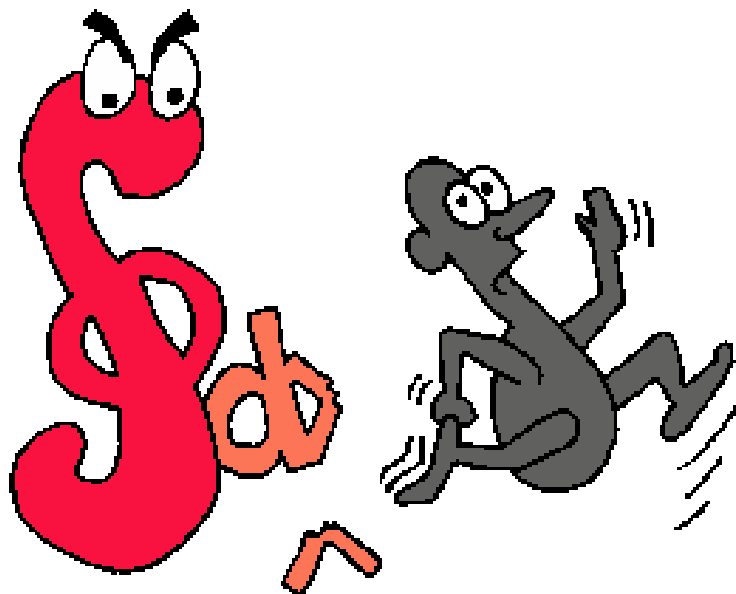


Mathematik–Online–Kurs

# PRÜFUNGSVORBEREITUNG HM 3

FÜR BAU, FMT, IUI, MACH, TEMA, TPBAU,  
TPMACH, UMW VERF WS 10/11



<http://www.mathematik-online.org/>



# Mathematik–Online–Kurs

## PRÜFUNGSVORBEREITUNG HM 3

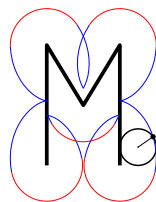
FÜR BAU, FMT, IUI, MACH, TEMA, TPBAU,  
TPMACH, UMW VERF WS 10/11

Stand: 4. Februar 2011

© 2011 Mathematik-Online

Diese Veröffentlichung ist urheberrechtlich geschützt.

Weder Mathematik-Online noch einer der Autoren übernehmen Haftung für die Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit oder Qualität dieser Veröffentlichung. Haftungsansprüche, welche sich auf Schäden materieller oder ideeller Art beziehen, die durch die Nutzung oder Nichtnutzung der dargebotenen Informationen bzw. durch die Nutzung fehlerhafter und unvollständiger Informationen verursacht wurden, sind grundsätzlich ausgeschlossen.



<http://www.mathematik-online.org/>



# Inhaltsverzeichnis

1	Mehrdimensionale Integration	7
2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	9
3	Fourieranalysis	11
4	Probeklausur	13





# Kapitel 1

## Mehrdimensionale Integration

**Interaktive Aufgabe 1.1** (Online-Nummer 493):

**Koordinatentransformation und zugehörige Funktionaldeterminante, Flächenberechnung**

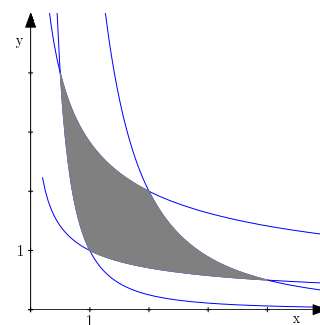
Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p e^q \\ p e^{-2q} \end{pmatrix}$$

und der Bereich

$$D : 1 \leq x^2 y \leq 8, \quad 1 \leq x y^2 \leq 8.$$

- Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation  $\Phi$ .
- Beschreiben Sie den Bereich  $D$  in  $pq$ -Koordinaten und skizzieren Sie  $D$  in der  $pq$ -Ebene.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $D$ .



**Interaktive Aufgabe 1.2** (Online-Nummer 1641):

**Volumen und Oberfläche einer gelochten Kugel**

Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius eins, aus der ein zylinderförmiges Loch mit Radius  $a$  symmetrisch zum Mittelpunkt herausgebohrt wurde.

**Interaktive Aufgabe 1.3** (Online-Nummer 1642):

**Schwerpunkt und Flächeninhalt eines Paraboloids**

Berechnen Sie den Schwerpunkt  $S$  und den Flächeninhalt  $F$  des Paraboloids

$$P : z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

**Interaktive Aufgabe 1.4** (Online-Nummer 576):

**Fluss verschiedener Vektorfelder durch die Oberfläche eines Zylinders**

Gegeben sind das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^z \\ -xe^z \\ e^{z\rho} \end{pmatrix}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und der Zylinder

$$K : x^2 + y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

mit der Oberfläche  $S$ . Berechnen Sie

- $\operatorname{div} \vec{F}$ ,
- den Fluss von  $\vec{F}$  durch  $S$  nach außen,
- den Fluss von  $\operatorname{rot} \vec{F}$  durch  $S$  nach außen.

**Interaktive Aufgabe 1.5** (Online-Nummer 466):

**Volumen und Fluss durch die Oberfläche eines Körpers**

Gegeben sei der Körper  $K : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x, \quad 0 \leq x$ .

- Beschreiben Sie den Körper  $K$  in Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$ .
- Berechnen Sie das Volumen  $V$  des Körpers  $K$ .
- Berechnen Sie den Fluss  $\Phi$  des Vektorfeldes  $\vec{F} = (xy^2, yx^2, x^2y^2)^t$  durch die Oberfläche von  $K$  von innen nach außen.

**Interaktive Aufgabe 1.6** (Online-Nummer 1647):

**Arbeitsintegral, Flussintegral, Satz von Stokes**

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \ln(1 + z^2) \\ y \arctan x^2 \\ \ln(2 + \cos^2 z) \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie das Arbeitsintegral  $\int_{K_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  längs des positiv orientierten Kreises  $K_1 : x^2 + y^2 = 4, z = 3$ .
- Bestimmen Sie den Fluss von  $\operatorname{rot} \vec{F}$  durch die Kreisscheibe  $D$  mit Rand  $K_2 : x^2 + y^2 = 4, z = 0$  nach oben.
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von  $\operatorname{rot} \vec{F}$  durch den Zylindermantel  $S : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$  nach außen.

# Kapitel 2

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

**Interaktive Aufgabe 2.1** (Online-Nummer 575):

**Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, Anfangswertprobleme**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- a)  $y' = (2x - 5)y, \quad y(3) = 1$       b)  $y' = \frac{y^2}{x(2x - 1)}, \quad y(1) = -1/2$   
c)  $y' = 2y + 5 \sin x, \quad y(0) = 2$

**Interaktive Aufgabe 2.2** (Online-Nummer 1443):

**Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung  $y(x)$  der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{-4e^{3x}}{1 + e^{2x}}$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

Geben Sie auch die Lösung zu den Anfangswerten  $y(0) = 2 + \ln 4$  und  $y'(0) = 4 + \ln 16$  an.

**Aufgabe 2.3** (Online-Nummer 646):

**Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung**

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen  $u(t)$  der folgenden Differentialgleichungen.

- a)  $u'' - u = e^{2t}$       b)  $u'' - 2u' + u = 1 + t$       c)  $u'' + u = 8 \cos(t) \cos(2t)$

**Interaktive Aufgabe 2.4** (Online-Nummer 655):

**Parameterabhängige Differentialgleichung zweiter Ordnung**

Gegeben sei die von dem reellen Parameter  $\alpha$  abhängige Differentialgleichung

$$u'' - (1 + \alpha)u' + \alpha u = f(t) .$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung  $u(t)$  der homogenen Differentialgleichung ( $f(t) = 0$ ) in Abhängigkeit von  $\alpha$ .
- b) Berechnen Sie im Fall  $\alpha = 0$  die allgemeine Lösung für  $f(t) = 4 \cos t$ . Für welche Anfangswerte von  $u(0)$  und  $u'(0)$  ist diese Lösung auf  $[0, \infty)$  beschränkt?



**Interaktive Aufgabe 2.5** (Online-Nummer 654):

**Homogenes Differentialgleichungssystem, konstante Koeffizienten**

Bestimmen Sie für das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$ ,
- b) die allgemeine Lösung  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^t$ ,
- c) die Lösung mit  $u(0) = (1, 0, 0)^t$ .

# Kapitel 3

## Fourieranalysis

**Interaktive Aufgabe 3.1** (Online-Nummer 1444):

**Fourier-Entwicklung einer trigonometrischen Funktion, Reihenwert**

Entwickeln Sie die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung der Funktion  $f(x) = \cos(x/3)$ ,  $x \in [-\pi, \pi)$  in eine Fourier-Reihe

$$f(x) \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

und bestimmen Sie durch Auswertung an einer geeigneten Stelle

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1}.$$

**Interaktive Aufgabe 3.2** (Online-Nummer 252):

**Komplexe und reelle Fourier-Reihe einer trigonometrischen Funktion, Parseval-Identität**

Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a_k$ ,  $b_k$  und  $c_k$  der reellen und komplexen Fourier-Reihe von  $|\cos(x/2)|$  auf  $[-\pi, \pi]$ . Welchen Wert hat die Summe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \quad ?$$



# Kapitel 4

## Probeklausur

### Probeklausur

(Online-Test Nummer 223)

#### Aufgabe 1:

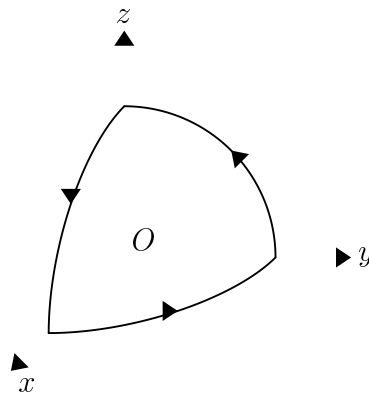
Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F} = ((xy)^{1+z}, 0, z^{(1+xy)})^t, \quad x, y, z \geq 0$$

sowie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von  $\text{rot } \vec{F}$  durch den im positiven Oktanten liegenden Teil der Kugeloberfläche

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x, y, z \geq 0;$$

in Richtung der äußeren Kugelnormale.



---

#### Aufgabe 2:

Das Flächenstück

$$S : x^2 - 4x + y^2 + 2z = 0, \quad z \geq 0$$

und die  $xy$ -Ebene schließen einen Körper  $K$  ein.

- Berechnen Sie das Volumen von  $K$ .
- Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z+1) \\ 0 \\ y^2z + 1 \end{pmatrix}$$

den Fluss von  $F$  durch  $S$  nach außen.

**Aufgabe 3:**

Lösen Sie die Differentialgleichungen:

- a)  $y' + 2y = \exp(-2x), \quad y(0) = 3$
- b)  $y' = x \exp(y), \quad y(0) = 1$
- c)  $y'' + y = \cos(2x), \quad y(0) = p, \quad y'(0) = 0.$

**Aufgabe 4:**

- a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) + 4u(t) = 4 \sin(2t) + 4t^2 + 2.$$

- b) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung  $u(0) = u'(0) = 0$  erfüllt.

**Aufgabe 5:**

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung  $(y_1, y_2)^t$  des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 6y_1 - 5y_2 \end{aligned}$$

sowie die spezielle Lösung  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)^t$  mit den Anfangswerten  $\tilde{y}_1(0) = 1$  und  $\tilde{y}_2(0) = -1$ .

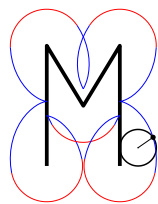
**Aufgabe 6:**

Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

von  $f(x) = x(\pi - |x|), \quad |x| \leq \pi$ . Geben Sie ebenfalls die Koeffizienten  $\tilde{a}_k$  und  $\tilde{b}_k$  der Stammfunktion  $\int_0^x f(y)dy$  an.





<http://www.mathematik-online.org/>