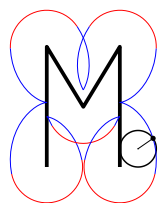


Mathematik–Online–Kurs

PRÜFUNGSVORBEREITUNG HM 3
FÜR EL WS 10/11



<http://www.mathematik-online.org/>

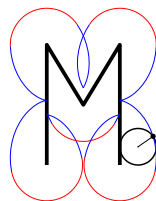
Mathematik–Online–Kurs
PRÜFUNGSVORBEREITUNG HM 3
FÜR EL WS 10/11

Stand: 28. Januar 2011

© 2011 **Mathematik-Online**

Diese Veröffentlichung ist urheberrechtlich geschützt.

Weder Mathematik-Online noch einer der Autoren übernehmen Haftung für die Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit oder Qualität dieser Veröffentlichung. Haftungsansprüche, welche sich auf Schäden materieller oder ideeller Art beziehen, die durch die Nutzung oder Nichtnutzung der dargebotenen Informationen bzw. durch die Nutzung fehlerhafter und unvollständiger Informationen verursacht wurden, sind grundsätzlich ausgeschlossen.



<http://www.mathematik-online.org/>

Inhaltsverzeichnis

1	Mehrdimensionale Integration	3
2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	5
3	Fourieranalysis	7
4	Funktionentheorie	9
5	Probeklausur	10



Kapitel 1

Mehrdimensionale Integration

Interaktive Aufgabe 1.1 (Online-Nummer 493):

Koordinatentransformation und zugehörige Funktionaldeterminante, Flächenberechnung

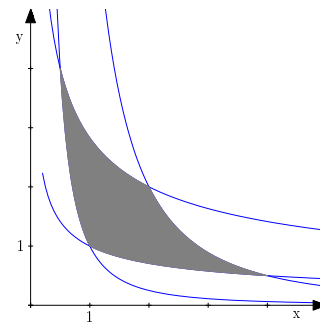
Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p e^q \\ p e^{-2q} \end{pmatrix}$$

und der Bereich

$$D : 1 \leq x^2 y \leq 8, \quad 1 \leq x y^2 \leq 8.$$

- Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation Φ .
- Beschreiben Sie den Bereich D in pq -Koordinaten und skizzieren Sie D in der pq -Ebene.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von D .



Interaktive Aufgabe 1.2 (Online-Nummer 1641):

Volumen und Oberfläche einer gelochten Kugel

Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius eins, aus der ein zylinderförmiges Loch mit Radius a symmetrisch zum Mittelpunkt herausgebohrt wurde.

Interaktive Aufgabe 1.3 (Online-Nummer 1642):

Schwerpunkt und Flächeninhalt eines Paraboloids

Berechnen Sie den Schwerpunkt S und den Flächeninhalt F des Paraboloids

$$P : z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Interaktive Aufgabe 1.4 (Online-Nummer 576):
Fluss verschiedener Vektorfelder durch die Oberfläche eines Zylinders

Gegeben sind das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^z \\ -xe^z \\ e^{z\rho} \end{pmatrix}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und der Zylinder

$$K: x^2 + y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

mit der Oberfläche S . Berechnen Sie

- $\operatorname{div} \vec{F}$,
- den Fluss von \vec{F} durch S nach außen,
- den Fluss von $\operatorname{rot} \vec{F}$ durch S nach außen.

Interaktive Aufgabe 1.5 (Online-Nummer 466):
Volumen und Fluss durch die Oberfläche eines Körpers

Gegeben sei der Körper $K: x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x, \quad 0 \leq x$.

- Beschreiben Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) .
- Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K .
- Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F} = (xy^2, yx^2, x^2y^2)^t$ durch die Oberfläche von K von innen nach außen.

Interaktive Aufgabe 1.6 (Online-Nummer 1647):
Arbeitsintegral, Flussintegral, Satz von Stokes

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \ln(1 + z^2) \\ y \arctan x^2 \\ \ln(2 + \cos^2 z) \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_{K_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs des positiv orientierten Kreises $K_1: x^2 + y^2 = 4, z = 3$.
- Bestimmen Sie den Fluss von $\operatorname{rot} \vec{F}$ durch die Kreisscheibe D mit Rand $K_2: x^2 + y^2 = 4, z = 0$ nach oben.
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von $\operatorname{rot} \vec{F}$ durch den Zylindermantel $S: x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$ nach außen.

Kapitel 2

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Interaktive Aufgabe 2.1 (Online-Nummer 575):

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, Anfangswertprobleme

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- a) $y' = (2x - 5)y$, $y(3) = 1$ b) $y' = \frac{y^2}{x(2x - 1)}$, $y(1) = -1/2$
c) $y' = 2y + 5 \sin x$, $y(0) = 2$

Interaktive Aufgabe 2.2 (Online-Nummer 326):

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, Anfangswertprobleme

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ folgender Differentialgleichungen

- a) $y' = \frac{xy^2}{1 + x^2}$, $y(0) = 1$
b) $y'(2y + x) + y = 0$, $y(0) = a > 0$
c) $y' + 2y = \cos x$, $y(0) = y(2\pi)$

Aufgabe 2.3 (Online-Nummer 661):

Differentialgleichung erster Ordnung, integrierender Faktor

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$1 + xy = (x^2 + x^3y)y', \quad x > 0.$$

Ermitteln Sie dazu einen integrierenden Faktor mit einem möglichst einfachen Ansatz ($\mu = \mu(x)$ oder $\mu = \mu(y)$).

Interaktive Aufgabe 2.4 (Online-Nummer 1443):

Inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, Variation der Konstanten, Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{-4e^{3x}}{1 + e^{2x}}$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

Geben Sie auch die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 2 + \ln 4$ und $y'(0) = 4 + \ln 16$ an.

Aufgabe 2.5 (Online-Nummer 646):

Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen $u(t)$ der folgenden Differentialgleichungen.

a) $u'' - u = e^{2t}$ b) $u'' - 2u' + u = 1 + t$ c) $u'' + u = 8 \cos(t) \cos(2t)$

Interaktive Aufgabe 2.6 (Online-Nummer 655):

Parameterabhängige Differentialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben sei die von dem reellen Parameter α abhängige Differentialgleichung

$$u'' - (1 + \alpha)u' + \alpha u = f(t).$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(t)$ der homogenen Differentialgleichung ($f(t) = 0$) in Abhängigkeit von α .
- b) Berechnen Sie im Fall $\alpha = 0$ die allgemeine Lösung für $f(t) = 4 \cos t$. Für welche Anfangswerte von $u(0)$ und $u'(0)$ ist diese Lösung auf $[0, \infty)$ beschränkt?

Interaktive Aufgabe 2.7 (Online-Nummer 654):

Homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung (3x3), konstante Koeffizienten

Bestimmen Sie für das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A ,
- b) die allgemeine Lösung $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^t$,
- c) die Lösung mit $u(0) = (1, 0, 0)^t$.

Interaktive Aufgabe 2.8 (Online-Nummer 1435):

Homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung (3x3), konstante Koeffizienten, Anfangswert

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$u' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} u$$

sowie die Lösung zum Anfangswert $u(0) = (2, 0, 0)^t$.

Kapitel 3

Fourieranalysis

Interaktive Aufgabe 3.1 (Online-Nummer 1444):

Fourier-Entwicklung einer trigonometrischen Funktion, Reihenwert

Entwickeln Sie die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion $f(x) = \cos(x/3)$, $x \in [-\pi, \pi)$ in eine Fourier-Reihe

$$f(x) \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

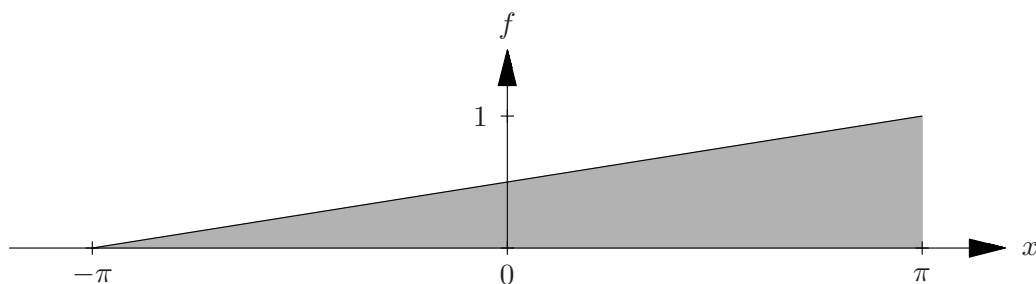
und bestimmen Sie durch Auswertung an einer geeigneten Stelle

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1}.$$

Interaktive Aufgabe 3.2 (Online-Nummer 1062):

Fourier-Transformation und Fourier-Reihe einer linearen Funktion

Bestimmen Sie für die abgebildete Funktion

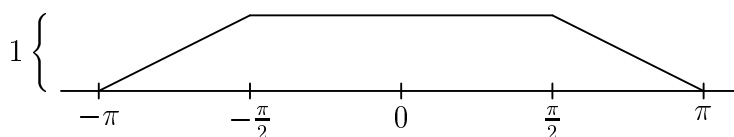


die Fourier-Transformierte \hat{f} sowie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der 2π -periodischen Fortsetzung.

Interaktive Aufgabe 3.3 (Online-Nummer 541):

Fourier-Transformation einer stückweise linearen Funktion

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der abgebildeten Funktion:



Interaktive Aufgabe 3.4 (Online-Nummer 1436):
Laplace-Transformation von Funktionen und einem Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten der Funktionen

a) $t \sin(2t)$ b) $(1 - 3t)^2$ c) $\min(t, 1)$

und lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

d) $u'' - 2u' + u = 2e^t, \quad u(0) = u'(0) = 0.$

Interaktive Aufgabe 3.5 (Online-Nummer 479):
Anfangswertproblem, Laplace-Transformation

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$u'''(t) - u(t) - 1 = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u''(0) = 1.$$

- a) In welche Gleichung geht die Differentialgleichung durch Laplace-Transformation $u(t) \mapsto U(s)$ über?
- b) Lösen Sie diese Gleichung nach $U(s)$ auf.
- c) Bestimmen Sie durch Rücktransformation die reelle Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems.

Kapitel 4

Funktionentheorie

Aufgabe 4.1 (Online-Nummer 787):

Orte komplexer Differenzierbarkeit

Bestimmen Sie alle Stellen $z = x + iy \in \mathbb{C}$, an denen die Funktion

$$f(z) = \bar{z}(|z|^2 - z - 2 \operatorname{Re}(z) - 6)$$

komplex differenzierbar ist. Wie lautet dort $f'(z)$?

Aufgabe 4.2 (Online-Nummer 788):

Harmonische Funktion, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Zeigen Sie, dass

$$u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$$

eine harmonische Funktion ist, d. h. $\Delta u = 0$, und bestimmen Sie eine Funktion $v(x, y)$, welche die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}u_x &= v_y \\u_y &= -v_x\end{aligned}$$

erfüllt. Berechnen Sie $f'(z)$ für die Funktion $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Kapitel 5

Probeklausur

Probeklausur

Aufgabe 1:

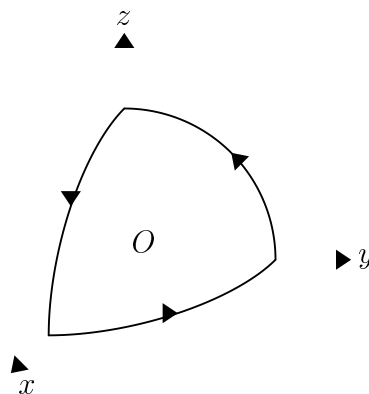
Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F} = ((xy)^{1+z}, 0, z^{(1+xy)})^t, \quad x, y, z \geq 0$$

sowie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von $\text{rot } \vec{F}$ durch den im positiven Oktanten liegenden Teil der Kugeloberfläche

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x, y, z \geq 0;$$

in Richtung der äußeren Kugelnormale.



Aufgabe 2:

Das Flächenstück

$$S : x^2 - 4x + y^2 + 2z = 0, \quad z \geq 0$$

und die xy -Ebene schließen einen Körper K ein.

- Berechnen Sie das Volumen von K .
- Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z+1) \\ 0 \\ y^2z + 1 \end{pmatrix}$$

den Fluss von F durch S nach außen.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) + 4u(t) = 4 \sin(2t) + 4t^2 + 2 .$$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $u(0) = u'(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2x^3y + (3x^2y^2 + x^4)y' = 0$$

Es gibt einen integrierenden Faktor μ , der nur von x abhängt. Bestimmen Sie diesen und geben Sie die allgemeine Lösung in der Form $F(x, y) = k$ an.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y(x)$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 4y_2 && + 2x + 1, \\ y_2' &= -y_1 + 3y_2 && + x + 1, \\ y_3' &= y_1 - 2y_2 + 2y_3 && + 1, \end{aligned}$$

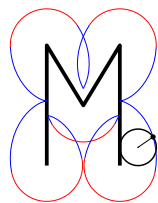
sowie die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = (1, 0, -1)^t$.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

von $f(x) = x(\pi - |x|)$, $|x| \leq \pi$. Geben Sie ebenfalls die Koeffizienten \tilde{a}_k und \tilde{b}_k der Stammfunktion $\int_0^x f(y)dy$ an.



<http://www.mathematik-online.org/>