Mathematik–Online–Kurs

Prüfungsvorbereitung HM 3 für kyb, mecha, phys WS 10/11

http://www.mathematik-online.org/

Mathematik–Online–Kurs

Prüfungsvorbereitung HM 3

für kyb, mecha, phys WS 10/11

Stand: 28. Januar 2011

http://www.mathematik-online.org/

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mehrdimensionale Integration

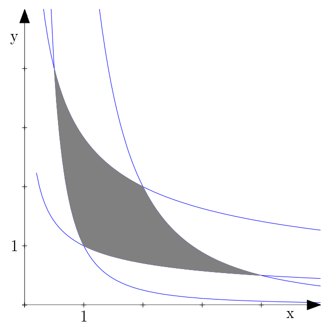
Interaktive Aufgabe 1.1 (Online-Nummer 493):
Koordinatentransformation und zugehörige Funktionaldeterminante, Flächenberechnung

Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\,e^{q} \\ p\,e^{-2q} \end{pmatrix}$$

und der Bereich

$$D: \; 1 \le x^2 y \le 8, \; 1 \le xy^2 \le 8.$$



a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation Φ.

b) Beschreiben Sie den Bereich D in $pq-$Koordinaten und skizzieren Sie D in der $pq-$Ebene.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

Interaktive Aufgabe 1.2 (Online-Nummer 1641):
Volumen und Oberfläche einer gelochten Kugel

Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius eins, aus der ein zylinderförmiges Loch mit Radius a symmetrisch zum Mittelpunkt herausgebohrt wurde.

Interaktive Aufgabe 1.3 (Online-Nummer 1642):
Schwerpunkt und Flächeninhalt eines Paraboloids

Berechnen Sie den Schwerpunkt S und den Flächeninhalt F des Paraboloids

$$P : z = x^2 + y^2\,, \quad 0 \le z \le 1\,.$$

Interaktive Aufgabe 1.4 (Online-Nummer 576):
Fluss verschiedener Vektorfelder durch die Oberfläche eines Zylinders

Gegeben sind das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^z \\ -x\mathrm{e}^z \\ \mathrm{e}^{z\varrho} \end{pmatrix}, \qquad \varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

und der Zylinder

$$K: \quad x^2+y^2 \le a^2\,, \quad 0 \le z \le 1$$

mit der Oberfläche S. Berechnen Sie

a) div $\vec{F}$,

b) den Fluss von $\vec{F}$ durch S nach außen,

c) den Fluss von rot $\vec{F}$ durch S nach außen.

Interaktive Aufgabe 1.5 (Online-Nummer 466):
Volumen und Fluss durch die Oberfläche eines Körpers

Gegeben sei der Körper $\quad K: \quad x^2+y^2 \le 1, \quad 0 \le z \le x, \quad 0 \le x\,.$

a) Beschreiben Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z).

b) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

c) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F} = (xy^2, yx^2, x^2y^2)^{\mathrm{t}}$ durch die Oberfläche von K von innen nach außen.

Interaktive Aufgabe 1.6 (Online-Nummer 1647):
Arbeitsintegral, Flussintegral, Satz von Stokes

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y\ln(1+z^2) \\ y\arctan x^2 \\ \ln(2+\cos^2 z) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int\limits_{K_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ längs des positiv orientierten Kreises K_1 : $x^2+y^2=4$, $z=3$.

b) Bestimmen Sie den Fluss von rot $\vec{F}$ durch die Kreisscheibe D mit Rand K_2: $x^2+y^2=4$, $z=0$ nach oben.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von rot $\vec{F}$ durch den Zylindermantel S: $x^2+y^2=4$, $0\le z\le 3$ nach außen.

Kapitel 2

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Interaktive Aufgabe 2.1 (Online-Nummer 575):
Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, Anfangswertprobleme

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' = (2x-5)y, \quad y(3) = 1$

b) $y' = \dfrac{y^2}{x(2x-1)}, \quad y(1) = -1/2$

c) $y' = 2y + 5\sin x, \quad y(0) = 2$

Interaktive Aufgabe 2.2 (Online-Nummer 326):
Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, Anfangswertprobleme

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ folgender Differentialgleichungen

a) $y' = \dfrac{xy^2}{1+x^2},\ y(0) = 1$

b) $y'(2y+x) + y = 0,\ y(0) = a > 0$

c) $y' + 2y = \cos x,\ y(0) = y(2\pi)$

Aufgabe 2.3 (Online-Nummer 661):
Differentialgleichung erster Ordnung, integrierender Faktor

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$1 + xy = (x^2 + x^3 y)y', \qquad x > 0.$$

Ermitteln Sie dazu einen integrierenden Faktor mit einem möglichst einfachen Ansatz ($\mu = \mu(x)$ oder $\mu = \mu(y)$).

Interaktive Aufgabe 2.4 (Online-Nummer 1443):
Inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, Variation der Konstanten, Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{-4e^{3x}}{1+e^{2x}}$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.
Geben Sie auch die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 2 + \ln 4$ und $y'(0) = 4 + \ln 16$ an.

Aufgabe 2.5 (Online-Nummer 646):
Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen $u(t)$ der folgenden Differentialgleichungen.

a) $u'' - u = e^{2t}$ **b)** $u'' - 2u' + u = 1 + t$ **c)** $u'' + u = 8\cos(t)\,\cos(2t)$

Interaktive Aufgabe 2.6 (Online-Nummer 655):
Parameterabhängige Differentialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben sei die von dem reellen Parameter α abhängige Differentialgleichung

$$u'' - (1+\alpha)u' + \alpha u = f(t)\ .$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(t)$ der homogenen Differentialgleichung ($f(t) = 0$) in Abhängigkeit von α.

b) Berechnen Sie im Fall $\alpha = 0$ die allgemeine Lösung für $f(t) = 4\cos t$. Für welche Anfangswerte von $u(0)$ und $u'(0)$ ist diese Lösung auf $[0, \infty)$ beschränkt?

Interaktive Aufgabe 2.7 (Online-Nummer 654):
Homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung (3x3), konstante Koeffizienten

Bestimmen Sie für das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A,

b) die allgemeine Lösung $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big)^{\mathrm{t}}$,

c) die Lösung mit $u(0) = (1, 0, 0)^{\mathrm{t}}$.

Interaktive Aufgabe 2.8 (Online-Nummer 1435):
Homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung (3x3), konstante Koeffizienten, Anfangswert

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$u' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} u$$

sowie die Lösung zum Anfangswert $u(0) = (2, 0, 0)^{\mathrm{t}}$.

Kapitel 3

Fourieranalysis

Interaktive Aufgabe 3.1 (Online-Nummer 1444):
Fourier-Entwicklung einer trigonometrischen Funktion, Reihenwert

Entwickeln Sie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f(x) = \cos(x/3)$, $x \in [-\pi, \pi)$ in eine Fourier-Reihe

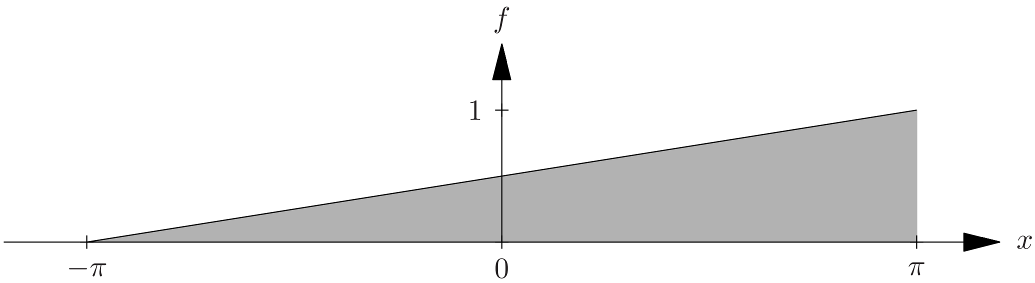
$$f(x) \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

und bestimmen Sie durch Auswertung an einer geeigneten Stelle

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1} .$$

Interaktive Aufgabe 3.2 (Online-Nummer 1062):
Fourier-Transformation und Fourier-Reihe einer linearen Funktion

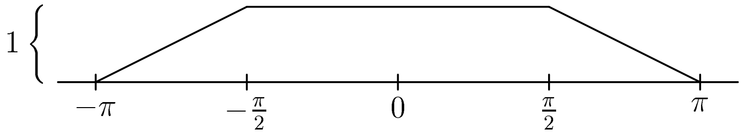
Bestimmen Sie für die abgebildete Funktion



die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ sowie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der 2π-periodischen Fortsetzung.

Interaktive Aufgabe 3.3 (Online-Nummer 541):
Fourier-Transformation einer stückweise linearen Funktion

Berechnen Sie die Fourier–Transformierte der abgebildeten Funktion:



Interaktive Aufgabe 3.4 (Online-Nummer 1436):
Laplace-Transformation von Funktionen und einem Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten der Funktionen

a) $t\sin(2t)$ **b)** $(1-3t)^2$ **c)** $\min(t,\,1)$

und lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

d) $u'' - 2u' + u = 2e^t\,,\quad u(0) = u'(0) = 0\,.$

Interaktive Aufgabe 3.5 (Online-Nummer 479):
Anfangswertproblem, Laplace-Transformation

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$u'''(t) - u(t) - 1 = 0\ ,\quad u(0) = 0,\ u'(0) = u''(0) = 1\ .$$

a) In welche Gleichung geht die Differentialgleichung durch Laplace-Transformation $u(t) \mapsto U(s)$ über?

b) Lösen Sie diese Gleichung nach $U(s)$ auf.

c) Bestimmen Sie durch Rücktransformation die reelle Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems.

Kapitel 4

Funktionentheorie

Aufgabe 4.1 (Online-Nummer 787):
Orte komplexer Differenzierbarkeit

Bestimmen Sie alle Stellen $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, an denen die Funktion

$$f(z) = \overline{z}(|z|^2 - z - 2\,\mathrm{Re}(z) - 6)$$

komplex differenzierbar ist. Wie lautet dort $f'(z)$?

Aufgabe 4.2 (Online-Nummer 788):
Harmonische Funktion, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Zeigen Sie, dass

$$u(x, y) = \mathrm{e}^x(x \cos y - y \sin y)$$

eine harmonische Funktion ist, d. h. $\Delta u = 0$, und bestimmen Sie eine Funktion $v(x, y)$, welche die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

erfüllt. Berechnen Sie $f'(z)$ für die Funktion $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.

Interaktive Aufgabe 4.3 (Online-Nummer 603):
Komplexe Kurvenintegrale mit Integralformeln

Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Integralformeln:

a) $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z^4}\,dz = \boxed{} + \boxed{}\,\mathrm{i}\,, \quad C : z(t) = 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [0, 2\pi]\,,$

b) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2 + 9} = \boxed{} + \boxed{}\,\mathrm{i}\,, \quad C : z(t) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [0, 2\pi]\,.$

Hinweis: Verändern Sie in **b)** den Integrationsweg.

Interaktive Aufgabe 4.4 (Online-Nummer 609):
Konvergenzgebiete von Laurent-Reihen

Bestimmen Sie die Konvergenzgebiete der folgenden Laurent-Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n + 1}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{q^n + q^{-n}}\,, \quad q > 1$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + 2}$

Interaktive Aufgabe 4.5 (Online-Nummer 465):
Partialbruchzerlegung, Laurent-Reihe

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z} \ .$$

b) Zum Entwicklungspunkt $z = -1$ gibt es zwei Laurent-Reihen. Bestimmen Sie die beiden Laurent-Reihen und ihr jeweiliges Konvergenzgebiet.

Interaktive Aufgabe 4.6 (Online-Nummer 1063):
Partialbruchzerlegung, Residuen, Taylor- und Laurent-Entwicklung einer rationalen Funktion

Bestimmen Sie für

$$f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-2)}$$

a) die Partialbruchzerlegung

b) die beiden Residuen

c) $I = \left| \int\limits_{|z|=4} f(z)\, dz \right|$

d) den Konvergenzradius der Taylor-Entwicklung im Punkt $z = \mathrm{i}$

e) die im Kreisring $2 < |z| < 5$ konvergente Laurent-Entwicklung $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

Interaktive Aufgabe 4.7 (Online-Nummer 607):
Berechnung reeller Integrale mittels komplexer Integrale

Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale mit Hilfe komplexer Integration.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$ **b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - 2\cos x + \sin x}$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{5 - 4\cos x}\, dx$

Kapitel 5

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 5.1 (Online-Nummer 1636):
Inhomogene eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + e^{-3t}\sin(x)\,, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \\ &u(x,0) = 2\sin(4x)\cos(x)\,. \end{aligned}$$

Interaktive Aufgabe 5.2 (Online-Nummer 1445):
Eindimensionale Wellengleichung, Anfangsrandwertproblem

Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t) + u(x,t), \quad x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) \ = \ 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad u_t(x,0) \ = \ \sin(2x). \end{aligned}$$

Interaktive Aufgabe 5.3 (Online-Nummer 1437):
Zweidimensionale lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswerten

Ermitteln Sie die Lösung $u(x,y)$ der linearen partiellen Differentialgleichung

$$u_x + u_y = u + 1 - x$$

für die Anfangswerte $u(0,y) = e^y$.

Kapitel 6

Probeklausur

Probeklausur

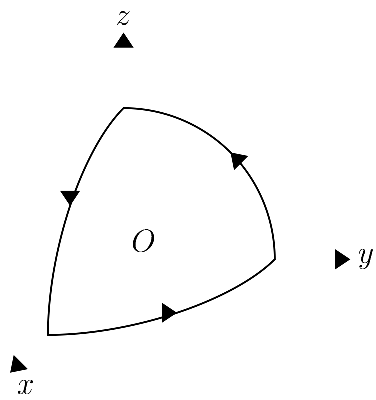
Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \left((xy)^{1+z},\ 0,\ z^{(1+xy)}\right)^{\mathrm{t}}, \qquad x, y, z \geq 0$$

sowie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von rot $\vec{F}$ durch den im positiven Oktanten liegenden Teil der Kugeloberfläche

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x, y, z \geq 0;$$

in Richtung der äußeren Kugelnormale.



Aufgabe 2:
Das Flächenstück

$$S :\ x^2 - 4x + y^2 + 2z = 0\ , \quad z \geq 0$$

und die xy–Ebene schließen einen Körper K ein.

a) Berechnen Sie das Volumen von K.

b) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z+1) \\ 0 \\ y^2 z + 1 \end{pmatrix}$$

den Fluss von F durch S nach außen.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) + 4u(t) = 4\sin(2t) + 4t^2 + 2\ .$$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $u(0) = u'(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2x^3y + (3x^2y^2 + x^4)y' = 0$$

Es gibt einen integrierenden Faktor μ, der nur von x abhängt. Bestimmen Sie diesen und geben Sie die allgemeine Lösung in der Form $F(x, y) = k$ an.

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten der Funktionen

a) $t^2e^{-3(t+1)}$ **b)** $\sin(2t)\cos(2t)$ **c)** $\max(1-t,\, 0)$

und lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

d) $u' - u = e^t \sin t\,, \quad u(0) = -1\,.$

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y(x)$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' & = & -y_1 & + & 4y_2 & & & + & 2x+1\,, \\ y_2' & = & -y_1 & + & 3y_2 & & & + & x+1\,, \\ y_3' & = & y_1 & - & 2y_2 & + & 2y_3 & + & 1\,, \end{array}$$

sowie die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = (1, 0, -1)^{\mathrm{t}}$.

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

von $f(x) = x(\pi - |x|)$, $|x| \le \pi$. Geben Sie ebenfalls die Koeffizienten $\tilde{a}_k$ und $\tilde{b}_k$ der Stammfunktion $\int_0^x f(y)dy$ an.

Aufgabe 8:
Gegeben sei die komplexwertige Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}.$$

Bestimmen Sie für $f(z)$ das Residuum an der Stelle $z = 2$.
Weiter sei die folgende (gegen den Uhrzeigersinn orientierte) Kurve in der komplexen Zahlenebene gegeben

$$C^+ = \left\{ |z-2| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen sie das Integral

$$F = \int_{C^+} f(z)\, dz\,.$$

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$2u_x - 4u_y = 6e^y$$

sowie die Lösung zu der Anfangsbedingung $u(x,1) = e^x$.

http://www.mathematik-online.org/