F. Stoll **11. Übungsblatt zur Vorlesung** W. Kimmerle

Mathematische Grundlagen für das Lehramt

Winter 2013/14

Aufgabe 36.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die periodischen Dezimalbrüche gerade den rationalen Zahlen entsprechen.

(a) Schreiben Sie den periodischen Dezimalbruch $0,\overline{45}$ als gekürzten Bruch.

(b) Schreiben die die rationale Zahl $\frac{1}{13}$ als periodischen Dezimalbruch.

Aufgabe 37.

Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass ein Polynom $p(x) \in K[x]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ höchstens n verschiedene Nullstellen in K hat.

Aufgabe 38.

In $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese vier Matrizen bezüglich der Multiplikation eine endliche Gruppe erzeugen. Wieviele Elemente hat diese? Ist sie kommutativ?

(b) Setze $\mathbb{H} = \{aE + bI + cJ + dK \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass dies ein Unterring des Matrizenrings $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist.

(c) Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente von $\mathbb{H}$. Ist $\mathbb{H}$ ein Körper?

(d) Finden Sie Lösungen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{H}$. Warum lässt sich sich Aufgabe 37 nicht anwenden?

Die Gruppe aus Aufgabe 38 (a), nennt man Quaternionengruppe, $\mathbb{H}$ nennt man die reellen Quaternionen. Diese Erweiterung von $\mathbb{C}$, welche 1843 von Sir W. R. Hamilton beschrieben wurde, war sehr überraschend, da man nach dem Beweis des Fundamentalsatzes dachte, man sei mit dem Erweitern durch.