Mathematische Grundlagen für das Lehramt

Winter 2013/14

Aufgabe 19.
Zeigen Sie, dass $G(\mathbb{N})$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, d. h. es gibt einen bijektiven Homomorphismus $G(\mathbb{N}) \to \mathbb{Z}$ (mit Verknüpfung $+$).

Aufgabe 20.
Sei $\varphi : \mathbb{N} \to G$ ein Homomorphismus. Warum kann φ zu einem Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z} \to G$ fortgesetzt werden, d. h. $\widetilde{\varphi}|_{\mathbb{N}} = \varphi$?

Aufgabe 21.
Sei H eine kommutative Gruppe. Zeigen Sie, dass $G(H)$ und H isomorph sind.

Aufgabe 22.
Sei $(H, \cdot)$ eine nicht leere kommutative Halbgruppe, in der nicht unbedingt die Kürzungsregel gilt. Wir definieren auf $H \times H$ eine Relation mittel

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow \exists h \in H : a \cdot d \cdot h = b \cdot c \cdot h.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Weiterhin sei auf $H \times H/_{\sim}$ die Verknüpfung $*$ durch $[a, b] * [c, d] = [a \cdot c, b \cdot d]$ definiert. Weisen Sie nach, dass $(H \times H/_{\sim}, *)$ ein Gruppe ist. Ist die Abbildung $H \to H \times H/_{\sim} : h \mapsto [h \cdot h_0, h_0]$ (mit $h_0 \in H$ fest gewählt) injektiv?

Aufgabe 23.
Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 3.10, d. h. zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\psi : G(H) \to G : [g, h] \mapsto \varphi(g) \star \varphi(h)^{-1}$ ist ein Homomorphismus.

(b) Sind ψ und ψ' Homomorphismen von $G(H)$ nach G mit $\psi \circ \iota = \varphi$ bzw. $\psi' \circ \iota = \varphi$, dann ist $\psi = \psi'$.