Mathematische Grundlagen für das Lehramt

Winter 2013/14

Aufgabe 28.

(a) Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass der Polynomring $R[x]$ ebenfalls ein Integritätsbereich ist.

(b) Sei K Körper. Zeigen Sie, dass $K[x]$ ein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 29.
$R := \mathbb{Z}[\sqrt{5}\mathrm{i}] = \{a+b\sqrt{5}\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ ist Ring mit der üblichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie alle $r \in R$ mit $|r| \leq 2$.

(b) Zeigen Sie, dass 2 irreduzibel ist.

(c) Zeigen Sie, dass 2 nicht prim ist. Berechnen sie dazu $(1 + \sqrt{5}\mathrm{i})(1 - \sqrt{5}\mathrm{i})$.

Sei R ein kommutativer Ring, der bezüglich der Relation $\leq$ total geordnet ist. Dann heißt R *geordneter Ring*, falls für alle $a, b, c \in R$ gilt

$$\begin{array}{ll} (O_+) & a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c, \\ (O.) & c > 0 \Rightarrow (a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c). \end{array}$$

Weiterhin heißt der geordnete Ring R *archimedisch geordnet*, falls für alle $a, b \in R$ gilt

$$a > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > b.$$

Hierbei ist $n \cdot a = \underbrace{a + a + ... + a}_{n-\text{mal}}$.

Bemerkung: Ist R sogar ein Körper, so ist K ein geordneter Körper bzw. ein archimedisch geordneter Körper im Sinne der Vorlesung.

Aufgabe 30.
Sei R ein archimedisch geordneter Integritätsbereich und K sein Quotientenkörper. Zeigen Sie:

(a) Durch $[a, b] \leq [c, d] :\Leftrightarrow a \cdot d \leq b \cdot c$ für $b, d > 0$ wird auf K eine Ordnungsrelation definiert.

Man beachte dabei, dass die Beziehung $[a, b] = [-a, -b]$ gilt, sodass man jede Äquivalenzklasse in der Form $[a, b]$ mit $b > 0$ schreiben kann.

(b) Die Ordnungsrelation auf K ist eine Fortsetzung der Ordnungsrelation auf R, falls man $a \in R$ mit $[a, 1]$ identifiziert.

(c) K wird mit dieser Relation zu einem archimedisch geordnetem Körper.