F. Stoll **9. Übungsblatt zur Vorlesung** W. Kimmerle

Mathematische Grundlagen für das Lehramt

Winter 2013/14

Aufgabe 31.

Sei R ein (nicht unbedingt kommutativer) Ring und I ein zweiseitiges Ideal von R.

(a) Zeigen Sie, dass durch $r \sim s :\Leftrightarrow r - s \in I$ für $r, s \in R$ eine Äquivalenzrelation auf R gegeben ist. Die Äquivalenzklasse von $r \in R$ bezeichnen wir mit $\overline{r}$. $R/I = \{\overline{r} \mid r \in R\}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen.

(b) Zeigen Sie, dass durch $\overline{r} + \overline{s} = \overline{r + s}$ und $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r \cdot s}$ für $r, s \in R$ zwei woldefinierte Operationen $+, \cdot : R/I \times R/I \to R/I$ definiert sind, die R/I zu einem Ring machen. R/I bezeichnet man als **Faktorring**.

(c) Seien R und S Ringe $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\ker(\varphi)$ ein Ideal von R ist.

Aufgabe 32.

Sei K ein geordneter Körper. Zeigen Sie, dass Grenzwerte von Folgen eindeutig sind, d. h. ist (a_n) eine Folge in K, und gibt es $a, b \in K$, sodass die Folge sowohl gegen a als auch gegen b konvergiert, dann gilt $a = b$.

Aufgabe 33.

Eine Folge (a_n) in einem geordneten Körper K heißt **monoton wachsend**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sie heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein $c \in K$ gibt, sodass $a_n < c$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei K ein archimedisch geordneter Körper. Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge Cauchyfolge ist.

(b) Sei K ein nichtarchimedisch geordneter Körper. Finden Sie eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge (a_n) in K, die keine Cauchyfolge ist.