Fachbereich Mathematik
W. Kimmerle, L. Margolis

Thema: Boolesche Algebren

Begleitmaterial zu der Vorlesung Grundlagen der Mathematik

Einige Schreibweisen auf diesem Übungsblatt sind dem Übungsblatt zum Thema Verbände zu entnehmen.

Sei A eine Menge mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Des Weiteren sei für jedes $x \in A$ ein $x' \in A$ ausgezeichnet, genannt das **Komplement** von x. Dann nennt man $(A, +, \cdot, ')$ eine **Boolesche Algebra**, falls die folgenden Gesetze gelten:
Die Assoziativgesetze (A_+) und $(A.)$, die Kommutativgesetze (K_+) und $(K.)$, die Distributivgesetze (D_+) und $(D.)$ sowie

$$(C_+):\ x + x' = 1\ ,\ (C.): x \cdot x' = 0,$$

$$(N_+):\ x + 0 = x\ ,\ (N.): x \cdot 1 = x.$$

Bemerkung: Auch in Booleschen Algebren liefern die Axiome eine Dualität: Durch das Vertauschen von $+$ und $\cdot$ sowie von 1 und 0 gehen gültige Gesetze in gültige Gesetze über.

Aufgabe 1: Sei $(A, +, \cdot, ')$ ein Boolesche Algebra. Zeigen sie für alle $x, y \in A$:

a) Die Idempotenzgesetze (I_+) und $(I.)$.

b) $x + 1 = 1$ und $x \cdot 0 = 0$.

c) Die Verschmelzungsgesetze (V_+) und $(V.)$.

d) x' ist durch die Axiome (C_+) und $(C.)$ eindeutig bestimmt und es gilt $(x')' = x$.

e) Die De Morganschen Gesetze: $(x \cdot y)' = x' + y'$ und $(x + y)' = x' \cdot y'$.

Insbesondere erhalten wir, dass jede Boolesche Algebra ein distributiver Verband ist mit $+$ und $\cdot$. Analog können wir also auch auf einer Booleschen Algebra eine Ordnungsrelation $\leq$ definieren mittels

$$x \leq y \Leftrightarrow x + y = y \Leftrightarrow x \cdot y = x.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass mit dieser Ordnungsrelation gilt:

a) $x + y = 1 \Rightarrow x' \leq y$ und $x \cdot y = 0 \Rightarrow x' \geq y$.

b) $x < y \Rightarrow x' \cdot y \neq 0$.

Wir nennen $a \in A$ ein **Atom**, falls $a \neq 0$ gilt und für jedes $x \in A$ aus $x \leq a$ folgt, dass $x = 0$ oder $x = a$ gilt. Atome sind also minimale Elemente in A, wenn wir von der 0 absehen. Die Menge aller Atome bezeichnen wir mit $At(A)$.
Für $x \in A$ setzen wir weiterhin $M(x) = \{a \in A \mid a \in At(A), a \leq x\}$. Dies ist also die Menge der Atome unterhalb von x, insbesondere gilt $At(A) = M(1)$ und $M(0) = \varnothing$.

Aufgabe 3: Sei $(A, +, \cdot, ')$ eine endliche Boolesche Algebra. Zeigen Sie für alle $x \in A$:

a) Atome existieren und es gilt $M(x) \neq \varnothing$ für $x \neq 0$.

b) Ist $a \in A$ ein Atom so gilt $a \leq x$ oder $a \leq x'$.

c) Sind $a, \bar{a} \in At(A)$ mit $a \neq \bar{a}$, so gilt $a \cdot \bar{a} = 0$.

d) Es ist $\sum_{a \in M(x)} a = x$.

Hinweis: Lösen Sie 3d), indem Sie zuerst $\sum_{a \in M(x)} a \leq x$ zeigen und dann $\sum_{a \in M(x)} a < x$ mit Aufgabe 2 zum Widerspruch führen.

Wir nennen zwei Boolesche Algebren $(A, +, \cdot, ')$ und $(B, \bar{+}, \bar{\cdot}, \bar{'})$ isomorph, wenn eine Abbildung $\varphi : A \to B$ existiert, welche bijektiv ist und außerdem die folgenden Regeln für alle $x, y \in A$ erfüllt: $\varphi(x + y) = \varphi(x) \bar{+} \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \bar{\cdot} \varphi(y)$ und $\varphi(x') = \varphi(x)^{\bar{'}}$.

Aufgabe 4: (Darstellungssatz für endliche Boolesche Algebren)
Sei $(A, +, \cdot, ')$ eine endliche Boolesche Algebra und $M = M(1)$. Es bezeichne $P(M)$ die Potenzmenge von M und $C(X)$ das Komplement von einer Teilmenge X von M in M. Beweisen Sie: Die Booleschen Algebren $(A, +, \cdot, ')$ und $(P(M), \cup, \cap, C(-))$ sind isomorph. Ein Isomorphismus ist gegeben durch $\varphi : A \to P(M)$ mit $\varphi(x) = M(x)$.
Zusatz: Können Sie eine unendliche Boolesche Algebra angeben, die nicht isomorph ist zu $(P(M), \cup, \cap, C(-))$ für jede Menge M?