Fachbereich Mathematik
W. Kimmerle/ L. Margolis

Thema: Verbände

Begleitmaterial zu der Vorlesung Grundlagen der Mathematik

Eine Menge V mit den beiden Verknüpfungen $\cap$, $\cup$ heißt **Verband**, falls für alle $x,\ y,\ z \in V$ gilt:

$(A_\cap):\ x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$

$(A_\cup):\ x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$ (Assoziativgesetze)

$(K_\cap):\ x \cap y = y \cap x$

$(K_\cup):\ x \cup y = y \cup x$ (Kommutativgesetze)

$(V_\cap):\ x \cup (x \cap y) = x$

$(V_\cap):\ x \cap (x \cup y) = x$ (Verschmelzungsgesetze)

Weiterhin heißt ein Verband **distributiv**, falls die Distributivgesetze gelten:

$(D_\cap):\ x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

$(D_\cup):\ x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

Bemerkung: In Verbänden gilt die Dualität, d.h. wenn ein Gesetz mit $\cap$ und $\cup$ gilt, so gilt es auch nach Vertauschung dieser Verknüpfungsoperationen. Dies folgt direkt aus der Symmetrie der Axiome in $\cap$ und $\cup$.

Aufgabe 1: Zeigen Sie die Idempotenzgesetze in einem Verband. Diese besagen:

$(I_\cap):\ x \cap x = x$

$(I_\cup):\ x \cup x = x$

Aufgabe 2: Sei G eine Gruppe und seien M und N Teilmengen von G. Dann heißt die kleinste Untergruppe von G, welche sowohl M als auch N enthält das **Erzeugnis von M und N** und wird $< M, N >$ geschrieben.
Zeigen Sie, dass die Menge aller Untergruppen von G mit dem Schnitt und

dem Erzeugnis einen Verband bilden. Ist dieser distributiv?
Hinweis: Berechnen Sie etwa den Untergruppenverband der S_3.

Zur Erinnerung: Eine Relation $\leq$ auf einer Menge M heißt **Ordnungsrelation**, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Dabei bedeutet die Antisymmetrie, dass für alle $a, b \in M$ gilt: $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$.
Zu einer Teilmenge A von M heißt $x \in M$ **Supremum** von A, wenn für alle $n \in N$ gilt $n \leq x$ und falls für jedes weitere Element $y \in M$, welches $n \leq y$ für alle $n \in N$ erfüllt, $x \leq y$ gilt. Man schreibt $x = \sup(A)$.
Entsprechend heißt x **Infimum** von A, wenn $x \leq n$ für alle $n \in N$ gilt und falls $y \leq n$ für alle $n \in N$ gilt, so folgt $y \leq x$. Man schreibt $x = \inf(A)$.

Aufgabe 3: Es sei $(V, \cap, \cup)$ ein Verband. Zeigen Sie:

a) $x \cup y = x \Leftrightarrow x \cap y = y \;\; \forall x, y \in V$.

b) Durch $x \leq y :\Leftrightarrow x \cap y = x$ wird auf V eine Ordnungsrelation definiert.

c) Bezüglich dieser Ordnungsrelation gilt $\sup(\{x, y\}) = x \cup y$ und $\inf(\{x, y\}) = x \cap y$.

Aufgabe 4: Sei M ein Menge und $\leq$ eine Halbordnung auf M. Zeigen Sie:

a) Alle endlichen Teilmengen von M besitzen genau dann ein Supremum und Infimum, wenn dies für alle zweielementigen Mengen gilt.

b) Führt man auf einem Verband $(V, \cap, \cup)$ eine Ordnungsrelation mittels $x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x$ ein, so besitzen alle endlichen Teilmengen von V ein Supremum und Infimum.

c) Besitzt umgekehrt M die Eigenschaft, dass für alle endlichen Teilmengen ein Supremum und ein Infimum existieren, so ist $(M, \inf(-,-), \sup(-,-))$ ein Verband.

Aufgabe 5: Weitere Beispiele von Verbänden.

a) Es sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge von M mit Schnitt und Vereinigung einen Verband bildet.

b) Es sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass die Teiler von n mit ggT und kgV einen Verband bilden.