IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik I-III **Diplomvorprüfung** **4. 9. 2006**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung **phys**, **cophys**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 180 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle neun Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: 40** handbeschriebene Blätter DIN A4 sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 3–9** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **23. 10. 2006** im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum **3. 11. 2006** in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Bestimmen Sie (Angabe des Endergebnisses genügt)

a) Anzahl der Monome $x^j y^k$ mit totalem Grad ≤ 5

b) Definitionsbereich von $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

c) $\sum\limits_{i,j,k=1}^{3} |\varepsilon_{ijk}|$

d) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

e) Zyklendarstellung von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (10 Punkte): Bestimmen Sie (Angabe des Endergebnisses genügt)

a) $\operatorname{rot}(0, xz, 0)^{\mathrm{t}}$

b) die Laplace-Transformierte von $(2t - 3)e^t$

c) $\int\limits_{|z|=1} z^{13}\, dz$

d) Konvergenzradius von $\dfrac{1}{z^2 - 1}$ um $z = \mathrm{i}$

e) $|\operatorname{grad} r|$

Aufgabe 3 (10 Punkte):

a) Berechnen Sie für $z = 1 - \mathrm{i}$ die Koordinaten- und die Polardarstellung von

$$\frac{z}{z + 2\mathrm{i}} \qquad \text{und} \qquad \bar{z}z^3\,.$$

b) Bestimmen Sie Radius und Mittelpunkt des Kreises

$$K:\ |z - 1| = 3|z|\,.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte): Transformieren Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 2 & 1 + \alpha^2 \\ 0 & -2 & -\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

auf obere Dreiecksform. Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert keine, eine, mehr als eine Lösung? Bestimmen Sie alle Lösungen für $\alpha = 3$.

Aufgabe 5 (10 Punkte):

a) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2n}{n+\sqrt{2n}}\,,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/2)}{3^n}\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}\,.$$

Hinweis: $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$

b) Bestimmen Sie den Konvergenz-Radius r der Potenz-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{1+n^k}}\,,\qquad k\in\mathbb{N}\,,$$

und untersuchen Sie für $x=-r$, für welche Parameter k die Reihe konvergiert und für welche sie absolut konvergiert.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ folgender Anfangswertprobleme. Kreuzen Sie an, um welchen Typ es sich handelt.

	linear	separabel	homogen
a) $y' = x\sqrt{y},\quad y(0)=1$	☐	☐	☐
b) $y'+3y=9x,\quad y(1)=0$	☐	☐	☐

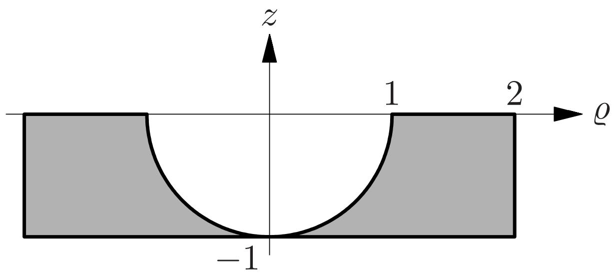
Aufgabe 7 (10 Punkte): Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten der Funktionen

a) $t\sin(2t)$ **b)** $(1-3t)^2$ **c)** $\min(t,\,1)$

und lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

d) $u''-2u'+u=2e^t\,,\quad u(0)=u'(0)=0\,.$

Aufgabe 8 (10 Punkte): Die Abbildung zeigt den Querschnitt der Differenz V eines Zylinders Z und einer Halbkugel K.



Beschreiben Sie V in Zylinderkoordinaten und geben Sie das Volumenelement dV als Funktion von (ϱ,φ,z) an. an. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F}=\begin{pmatrix} e^{yz}\\ \sin(xz)\\ z(x^2+y^2)\end{pmatrix}.$$

$\operatorname{div}\vec{F}$ sowie den Fluss von $\vec{F}$ und $\operatorname{rot}\vec{F}$ durch die Oberfläche von V nach außen.

Aufgabe 9 (10 Punkte): Konstruieren Sie eine Möbius-Transformation $z\mapsto w$ welche die Punkte i, 0, 1 auf $1+\mathrm{i}$, 0, ∞ abbildet. Bestimmen Sie die Bilder des Punktes ∞, der imaginären Achse $g:\operatorname{Re}z=0$ und der Halbebene $H:\operatorname{Re}z>0$.