Prüfung zur Numerischen Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel: 10 eigenhändig beschriebene Seiten DIN A4
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind fünf der sechs Aufgaben. Bitte geben Sie nur Lösungen zu fünf Aufgaben ab. Werden zu allen sechs Aufgaben Lösungen abgegeben, wird die Lösung zur Aufgabe 6 nicht gewertet.

Alle wesentlichen Zwischenschritte sind stichwortartig anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses allein genügt nur bei Aufgabe eins.

Beschreiben Sie alle Blätter nur einseitig und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt !

Wichtige Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass bei einigen Fachrichtungen zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis.

Informieren Sie sich bis spätestens 19. 10. 2007 über Ihr Prüfungsergebnis, das voraussichtlich ab 1. 10. 2007 durch Aushang bei Raum 8.162 bekannt gegeben wird, und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend im Sekretariat 8.162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung. Mit der Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtung an.

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Die Folge $A^n x/\|A^n x\|$ konvergiert nur, wenn alle Eigenwerte von A reell sind.

2. Eine Givens-Rotation vergrößert die Absolutbeträge der Matrix-Einträge nicht.

3. Die Methode der konjugierten Gradienten liefert die Lösung eines symmetrischen, positiv definiten linearen Gleichungssystems nach endlich vielen Schritten.

4. Ein lineares Programm besitzt höchstens endlich viele Lösungen.

5. Die Normalengleichungen sind für jede Matrix lösbar.

Aufgabe 2 Zerlegen Sie die Gleitpunkt-Berechnung des Ausdrucks

$$y = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

in elementare Operationen und bestimmen Sie die Konditionszahlen c_k. Geben Sie für $x_1, x_2 > 0$ bestmögliche Schranken für c_k an und damit eine Abschätzung für $|\Delta y|/|y|$ bei relativen Fehlern der Eingabewerte $\leq$eps.

Aufgabe 3 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

```
function [a,b]=chol_tri(c,d),
```

das die Cholesky-Faktorisierung

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & 0 \\ c_1 & d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & c_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$$

einer positiv definiten symmetrischen Tridiagonalmatrix berechnet.

Drücken Sie dazu zunächst d_k und c_k durch a_j und b_j aus.

(Die Vektoren a, b, c, d enthalten die von Null verschiedenen Elemente der Matrizen.)

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

einen Schritt $x \to y$ der Gauß-Seidel-Iteration mit Startwert $x = (2,2)^{\mathrm{t}}$ durch. Bestimmen Sie die Iterationsmatrix Q sowie deren Spektralradius.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die (einzige) zulässige Basislösung und die zulässige Menge D des linearen Programms

$$(\gamma, 0, 1)x \to \min\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0\,.$$

Für welche Werte des Parameters $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen x und wie lauten diese?

Aufgabe 6 Transformieren Sie die 3×3-Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

durch eine Householdertransformation der letzten beiden Zeilen auf obere Dreiecksform und geben Sie die 2×2 Transformationsmatrix in der faktorisierten Form $E - \frac{1}{r}dd^{\mathrm{t}}$ an. Bestimmen Sie ebenfalls die Lösung x des Ausgleichsproblems $e = |Ax - b| \to \min$ und geben Sie auch den Fehler e an.