

Lösungen zur Klausur

für mach, umw, fmt, bau, immo, tema, und zugehörige Technikpädagogik

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Gegeben ist das folgende Differentialgleichungssystem:

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zunächst wird eine Lösung f des homogenen Differentialgleichungssystems mit der Anfangsbedingung $f(0) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmt. Es ist

$$A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2(e_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren e_1 und $A(e_1)$ sind linear unabhängig, jedoch ist $A^2(e_1)$ von ihnen linear abhängig; es ist nämlich

$$A^2(e_1) - 4A(e_1) + 4e_1 = 0.$$

Die beiden Komponenten f_1, f_2 der gesuchten Lösung f des homogenen Systems erfüllen also die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 4y' + 4y = 0; \tag{1}$$

die Anfangsbedingungen ergeben sich aus

$$f(0) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f'(0) = A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Polynom ist

$$p(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2.$$

(Man hätte es auch als charakteristisches Polynom von A gewinnen können.) Es hat 2 als doppelte Nullstelle; ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (1) besteht also aus den Funktionen

$$e^{2x}, \quad xe^{2x}$$

mit den Ableitungen

$$2e^{2x}, \quad (1 + 2x)e^{2x}.$$

Die Komponenten $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ der gesuchten Lösung sind demnach Linearkombinationen $r_1 e^{2x} + r_2 x e^{2x}$, wobei r_1 und r_2 das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösen (mit der Wronski-Matrix des gegebenen Fundamentalsystems an der Stelle $x = 0$ als Koeffizientenmatrix). Es ergibt sich

$$r_1 = 1, r_2 = -1 \quad \text{bzw.} \quad r_1 = 0, r_2 = 1.$$

Die gesuchte Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems ist somit

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - x e^{2x} \\ x e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Weitere Lösungen sind

$$f'(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - 2x e^{2x} \\ e^{2x} + 2x e^{2x} \end{pmatrix}$$

sowie

$$g(x) = f'(x) - f(x) = \begin{pmatrix} -x e^{2x} \\ e^{2x} + x e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden f und g ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems mit zugehöriger Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - x e^{2x} & -x e^{2x} \\ x e^{2x} & e^{2x} + x e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem ist normiert, d.h. $M(0)$ ist die Einheitsmatrix; folglich ist $M(x)^{-1} = M(-x)$.

(Falls $M(x)$ die Wronski-Matrix eines nicht normierten Fundamentalsystems ist, ist allgemeiner $M(x)^{-1} = M(0)^{-1} M(-x) M(0)$.)

Zur Gewinnung einer partikulären Lösung \hat{f}_p des inhomogenen Differentialgleichungssystems macht man gemäß dem Prinzip der Variation der Konstanten den Ansatz

$$\hat{f}_p(x) = c_1(x) f(x) + c_2(x) g(x)$$

mit differenzierbaren Funktionen c_1, c_2 , deren Ableitungen dem Gleichungssystem

$$M(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

genügen. Es ist also

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix} = M(-x) \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix},$$

so dass man $c_1(x) = e^{-x}$, $c_2(x) = -e^{-x}$ wählen kann. Damit erhält man als partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\hat{f}_p(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

(Mit der Beobachtung, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2 ist, hätte man diese auch mit dem Ansatz $\hat{f}_p(x) = c(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ durch Lösen der Differentialgleichung $c'(x) = 2c(x) - e^x$ gewinnen können.)

Der Lösungsraum des gegebenen inhomogenen Differentialgleichungssystems besteht aus den Funktionen

$$r_1 f + r_2 g + \hat{f}_p$$

mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

In der x - y -Ebene ist die Menge $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq -y^2 + 4y - 3\}$ gegeben. Bestimmen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation von G um die x -Achse entsteht.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Es ist $-y^2 + 4y - 3 = 0$ genau für $y = 1$ oder $y = 3$, also $-y^2 + 4y - 3 \geq 0$ genau für $y \in [1, 3]$.

Der Drehkörper lässt sich also mit der Funktion $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (y, z) \mapsto \sqrt{y^2 + z^2}$ beschreiben als

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq r(y, z) \leq 3, 0 \leq x \leq -(r(y, z))^2 + 4r(y, z) - 3\}.$$

Sein Volumen erhält man durch Integration über den Kreisring

$$B = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y^2 + z^2 \leq 9\}$$

als

$$V = \iint_B (-(r(y, z))^2 + 4r(y, z) - 3) \, dy \, dz.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten (r, φ) in der y - z -Ebene (mit Funktionaldeterminante r) wird dies

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 (-r^2 + 4r - 3)r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4}r^4 + \frac{4}{3}r^3 - \frac{3}{2}r^2 \right]_{r=1}^3 \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} \, d\varphi = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

(Als Alternative kann man mit den üblichen Formeln für Drehkörper das Volumen auch bestimmen als Differenz der Volumina der zwei Drehkörper, deren äußere Konturen folgendermaßen beschrieben sind:

- durch die Gleichung $y = 2 + \sqrt{1-x}$ beziehungsweise $y = 2 - \sqrt{1-x}$ für $x \in [0, 1]$, welche man aus $x = -y^2 + 4y - 3$ gewinnt
- oder durch die beiden Kurven, die durch $t \mapsto (-t^2 + 4t - 3, t)$ für $t \in [1, 2]$ beziehungsweise für $t \in [2, 3]$ parametrisiert sind.)

Aufgabe 3: (15 Punkte)

Gegeben ist das Vektorfeld

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

und die geschlossene Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, z = 2(1 - (x^2 + y^2))\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}.$$

Berechnen Sie den Fluss von g durch S

$$\iint_S (g \bullet n) \, dO,$$

wobei n der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor der Fläche S ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Sei \bar{J} der von S berandete Körper. Mit dem Satz von Gauß ist

$$\iint_S (g \bullet n) \, dO = \iiint_{\bar{J}} \operatorname{div} g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\bar{J}} 1 \, dx \, dy \, dz =: V$$

das Volumen von \bar{J} . Dieses Volumen lässt sich berechnen durch Integration über die Einheitskreisscheibe

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

als

$$V = \iint_D 2(1 - (x^2 + y^2)) \, dx \, dy.$$

Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \, d\varphi = 4\pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \pi.$$

(Alternativ kann man den Fluss

$$\iint_S (g \bullet n) \, dO$$

direkt berechnen. Der Fluss durch den Boden ist 0, da das Vektorfeld g dort 0 ist. Der Fluss durch den oberen Teil von S ist

$$\iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(1 - (x^2 + y^2)) \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4y \end{pmatrix} \right) \, dx \, dy = \iint_D 2(1 - (x^2 + y^2)) \, dx \, dy,$$

dies führt auf dasselbe Integral wie oben. Der Normalenvektor

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4y \end{pmatrix}$$

wird dabei *nicht* auf Einheitslänge normiert; dies trägt dem Verzerrungsfaktor der Parametrisierung Rechnung.)

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = (x - 2\pi k)^2 - \pi^2$ für $x \in [(2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi[$ und $k \in \mathbb{Z}$ gegeben.

Berechnen Sie ihre Fourier-Koeffizienten a_0 sowie a_m und b_m für $m \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 - \pi^2 x \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{4}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Tatsache, dass $\sin(m\pi) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$, erhält man mit zweimaliger partieller Integration:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos(mx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[(x^2 - \pi^2) \cdot \frac{1}{m} \sin(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot \frac{1}{m} \sin(mx) \, dx \right) \\ &= -\frac{2}{m\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(mx) \, dx \\ &= -\frac{2}{m\pi} \left(\left[-\frac{1}{m} x \cos(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{m} \cos(mx) \, dx \right) \\ &= -\frac{2}{m\pi} \left(-\frac{2\pi}{m} \cos(m\pi) + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{m} \sin(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{4}{m^2} \cos(m\pi) \\ &= (-1)^m \cdot \frac{4}{m^2} \end{aligned}$$

Für $-\pi < x < \pi$ ist

$$f(-x) = x^2 - \pi^2 = f(x)$$

und wegen

$$f(\pi) = (\pi - 2\pi)^2 - \pi^2 = 0 = (-\pi)^2 - \pi^2 = f(-\pi)$$

gilt dies auch für $x = \pm\pi$. Also ist f auf $[-\pi, \pi]$ eine gerade Funktion und $f(x) \cdot \sin(mx)$ eine ungerade Funktion, da $\sin(mx)$ für $m \in \mathbb{N}$ ungerade ist. Deshalb gilt:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(mx) \, dx = 0$$

Alternativ erhält man nach zweimaliger partieller Integration die Stammfunktion:

$$\frac{1}{\pi} \int (x^2 - \pi^2) \cdot \sin(mx) \, dx = \left[-\frac{1}{m^3\pi} (m^2 x^2 \cos(mx) - 2mx \sin(mx) - 2 \cos(mx) - \pi^2 m^2 \cos(mx)) \right]$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen führt dann ebenfalls zum Ziel.