1. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer, autip, verf, wewi**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den Aufgaben **1-2** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den Aufgaben **3-4** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden deshalb auch nicht eingesammelt.
- Die Prüfungsergebnisse werden vorausssichtlich ab Vorlesungsbeginn vor dem Büro von Prof. Kühnel (Raum V57.7.348) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 12. 11. 2007 bei Frau Maderer (Raum V57.7.346) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*15 Punkte*)

Ein Körper $\mathbb{V}$ im $\mathbb{R}^3$ sei parametrisiert durch

$$f(r,\theta,\varphi) \ = \begin{pmatrix} (2 + r\cos\theta)\cdot\cos\varphi \\ (2 + r\cos\theta)\cdot\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix} .$$

Dabei gelte für die Parameter: $0 \leqq \theta < 2\pi$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ und $0 < r \leqq 1$. Die Oberfläche $\mathbb{T}$ von $\mathbb{V}$ ist gegeben durch die Gleichung $r = 1$. Dann ist $\mathbb{T}$ ein Torus. Der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor auf $\mathbb{T}$ sei durch $\vec{\mathbf{n}}$ bezeichnet.

(a) Man gebe ein Normalenvektorfeld $\vec{S}$ auf der Oberfläche $\mathbb{T}$ an.

(b) Man berechne nun zum Vektorfeld

$$\vec{W}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ,$$

den Fluss $\iint_{\mathbb{T}} \vec{W}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dF$ durch die Oberfläche $\mathbb{T}$ durch zweimaliges(!) Integrieren.

(c) Man bestimme das Volumen $Vol(\mathbb{V}) := \iiint_{\mathbb{V}} 1\cdot dV$ vom Körper $\mathbb{V}$ durch dreimaliges(!) Integrieren. Wie kann man hier die Größe $Vol(\mathbb{V})$ auch alternativ berechnen mit Hilfe eines Integralsatzes?

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$3y''(x) - 10y'(x) + 3y(x) = p(x) .$$

(a) Berechnen Sie für $p(x) = 0$ die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(b) Berechnen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung für $p(x) = 8e^{3x}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung $\widetilde{y}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung aus Aufgabenteil **(b)**, die das Anfangswertproblem $\widetilde{y}(0) = 2$, $\widetilde{y}\,'(0) = 7$ löst, und geben Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to-\infty} \widetilde{y}(x)$ an.

Name: | **Matrikelnr:** | **Fach:**

Aufgabe 3 (*8 Punkte*)

Geben Sie die Werte der folgenden komplexen Kurvenintegrale an, wobei der Weg C den am Ursprung zentrierten Einheitskreis einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

$\int_C \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2z}\,dz$	$\int_C \sinh(z)\cosh(z)\,dz$	$\int_C \frac{\cos(2z)}{z^3}\,dz$	$\int_C z\overline{z}\,dz$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Es bezeichne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der reellen Funktion $h(x)=e^{2x}$, welche auf dem Intervall $[-\pi,\pi)$ gegeben ist.

(a) Man berechne die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k(f):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}dx$:

$$c_0(f) = \boxed{}$$

$$c_k(f) = \boxed{}\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,.$$

(b) Man gebe die reelle Fourierreihe $S_f(x):=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(\,a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\,\big)$ an:

$$S_f(x) = \boxed{}$$

(c) Konvergiert die Fourierreihe $S_f(x)$ auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen f, ja oder nein? Antwort: $\boxed{}$

(d) Konvergiert die Fourierreihe S_f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f, ja oder nein? Antwort: $\boxed{}$