1. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den Aufgaben **1-3** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den Aufgaben **4-5** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden deshalb auch nicht eingesammelt.
- Die Prüfungsergebnisse werden vorausssichtlich ab Vorlesungsbeginn vor dem Büro von Prof. Kühnel (Raum V57.7.348) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 11. 5. 2007 bei Frau Maderer (Raum V57.7.346) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

(a) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Man gebe auch explizit diejenige Lösung Y_s an, welche die Anfangsbedingung $Y_s(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt!

(b) Man berechne die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 + 5y_2 + x \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 + x \end{aligned}.$$

Aufgabe 2 (*14 Punkte*)

Im Folgenden sollen alle Ergebnisse in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ angegeben werden!

(a) Es sei

$$f(z) := \frac{1}{z^4 + 1}$$

eine Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Werten in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Man gebe sämtliche Polstellen der Funktion $f(z)$ an und berechne in jeder dieser Polstellen das Residuum von f.

(b) Es sei $C(r) := \{r \cdot e^{\mathrm{i}t} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}) \ : \ t \in [0, 2\pi]\}$ ein Weg in $\mathbb{C}$, welcher einen Kreis durchläuft. Man berechne das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{C(r)} f(z)dz$$

für die Werte $r = 1,\ \frac{3}{2}$ und 3.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Es sei die Funktion $\tilde{f}(x)$ auf dem halboffenen Intervall $[-\pi, \pi)$ definiert durch:

$$\tilde{f}(x) \ := \begin{cases} 0 & : \ x \in [-\pi, 0) \\ x & : \ x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Mit $f(x)$ sei nun die direkte 2π-periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

(a) Man berechne die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$, zur Funktion f.

(b) Man gebe die Fourierreihe S_f zur Funktion f in reeller Form an.

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $S_f(x)$ gegen den Wert $f(x)$?

(d) Konvergiert die Fourierreihe S_f gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen die Funktion f?

Name: | **Matrikelnr:** | **Fach:**

Aufgabe 4 (*7 Punkte*)

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Differentialgleichungen linear oder exakt sind, oder sich durch elementare Umformungen in trennbare (separable) Differentialgleichungen umwandeln lassen. Mehrfachnennungen sind möglich.

Differentialgleichung	linear	exakt	trennbar
$y(x) + xy'(x) = 0$			
$\sin(x)y''(x) + \cos(x)y'(x) + y(x) = e^x$			
$2y(x)y'(x) = 0$			
$\left(\frac{x}{y(x)}\right)^2 + y'(x) = 0$			

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Funktionen auf gesamt $\mathbb{C}$ analytisch (bzw. analytisch fortsetzbar) sind.

Funktion	analytisch (fortsetzbar)	nicht analytisch
$e^{\sin(z)}$		
$\tanh(2z)$		
$\overline{z}^2$		
$\frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^2 + 1}$		