

1./2. Klausur der Diplomvorprüfung

für aer, autip, verf, wewi

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den Aufgaben **1-3** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den Aufgaben **4-5** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden deshalb auch nicht eingesammelt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Vorlesungsbeginn vor dem Büro von Prof. Kühnel (Raum V57.7.348) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 11. 5. 2007 bei Frau Maderer (Raum V57.7.346) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2y''(x) + 5y'(x) + 2y(x) = p(x).$$

- Berechnen Sie für $p(x) = 0$ die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung.
- Berechnen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung für $p(x) = 50e^{-2x} \sin(-2x)$.
- Bestimmen Sie die Lösung $\tilde{y}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung aus Aufgabenteil (b), die das Anfangswertproblem $\tilde{y}(0) = 2$, $\tilde{y}'(0) = 7$ löst, und geben Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{y}(x)$ an.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Ein beschränkter Körper $\mathcal{K}(\alpha)$ im \mathbb{R}^3 sei für beliebiges $\alpha > 0$ berandet durch die Kreisscheibe

$$\mathcal{S} = \{ \vec{\mathbf{u}} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0 \}$$

und den Graphen

$$\mathcal{G}(\alpha) = \{ \vec{\mathbf{u}} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 - (x^2 + y^2)^\alpha \}$$

der Funktion $f_\alpha(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^\alpha$ über der Kreisscheibe \mathcal{S} . Der nach außen gerichtete Normaleinheitsvektor auf der (stückweise regulären) Oberfläche von $\mathcal{K}(\alpha)$ sei durch $\vec{\mathbf{n}}$ bezeichnet. Man bestimme nun zum Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) den Fluss $\iint_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, dF$ durch die Kreisscheibe \mathcal{S} und

(b) den Fluss $\iint_{\mathcal{G}(\alpha)} \vec{V} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, dF$ durch den Graphen $\mathcal{G}(\alpha)$.

(c) Für welches $\alpha > 0$ gilt

$$\iiint_{\mathcal{K}(\alpha)} \operatorname{div}(V) \, dV = \pi \quad ?$$

(d) Es sei nun $\alpha = 1$. Man berechne das Dreifachintegral

$$h = \iiint_{\mathcal{K}(1)} z \, dV .$$

Wo liegt der geometrische Schwerpunkt $\vec{S} \in \mathbb{R}^3$ des Körpers $\mathcal{K}(1)$?

(Die Massendichteverteilung auf $\mathcal{K}(1)$ ist identisch 1!)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es sei

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \frac{1}{z^2 - iz}$$

eine komplexe Funktion.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{C}$ an.

(b) Berechnen Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f .

(c) Bestimmen Sie die Taylor-Reihenentwicklung von

$$\frac{1}{z - i}$$

um den Entwicklungspunkt $z = 0$.

(d) Bestimmen Sie die Laurent-Reihenentwicklung von f um den Entwicklungspunkt $z = 0$, die im Kreisring zwischen den Polen konvergiert.

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe 4 (10 Punkte)Es sei die 2π -periodische Funktion $f(x) := |\cos(\frac{x}{2})|$ auf \mathbb{R} gegeben.Man beachte, dass gilt: $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}} \right)$.(a) Man berechne die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$:

$$c_0(f) =$$

$$c_k(f) =$$

$$, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} .$$

(b) Man gebe die reelle Fourierreihe $S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ an:

$$S_f(x) =$$

(c) Konvergiert die Fourierreihe $S_f(x)$ auf \mathbb{R} punktweise gegen f , ja oder nein? Antwort:(d) Konvergiert die Fourierreihe S_f auf \mathbb{R} gleichmäßig gegen f , ja oder nein? Antwort:**Aufgabe 5** (8 Punkte)Geben Sie die Werte der folgenden komplexen Kurvenintegrale an, wobei der Weg C den am Ursprung zentrierten Einheitskreis einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

$\int_C \frac{2}{1+2iz} dz$	$\int_C e^{\cos(z)} dz$	$\int_C \left(\frac{e^{iz}}{z} \right)^3 dz$	$\int_C \frac{1}{ z } dz$
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>