Prof. Dr. C. Hesse, Prof. Dr. W. Kimmerle,
Prof. Dr. C. Rohde, Prof. Dr. G. Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Höhere Mathematik I–III **Diplomvorprüfung** **4. 3. 2008**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
phys

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Jeweils 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter für HMI/II sowie HMIII.
- Bei den **Aufgaben 1-6** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In dieser Klausur können bis zu **73 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse sind über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (studIUS) zu erfragen. (https://studius.uni-stuttgart.de/)

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (8 Punkte): Für fest gewählten Parameter $a > 0$ sei die Funktion f_a definiert durch

$$f_a(t) := \sqrt{\frac{1}{a^2} - t} \quad \left(t \leq \frac{1}{a^2}\right).$$

a) Berechnen Sie für f_a das eindimensionale Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $t = 0$ in Abhängigkeit des Parameters a.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) für die Funktion

$$g(x, y) = f_2(y) \cdot \frac{1 - f_1(x)}{x} \quad \left(x \leq 1, y \leq \frac{1}{4}\right)$$

das zweidimensionale Taylorpolynom der Ordnung 1 an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$.

Aufgabe 2 (9 Punkte): Die Matrix B sei gegeben durch

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte von B.

b) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren und Hauptvektoren von B.

c) Geben Sie die Jordan-Normalform von B an.

Aufgabe 3 (10 Punkte):

a) Zerlegen Sie das Polynom

$$p(z) = z^4 - 7z^3 + 18z^2 - 22z + 12$$

in ein Produkt

i) irreduzibler reeller Polynome,

ii) linearer reeller und komplexer Polynome.

Hinweis: Das Polynom p besitzt die komplexe Nullstelle $1 + i$.

b) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z = \left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^3 \cdot (1 + i)$

i) in Normalform $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$,

ii) in der trigonometrischen Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 4 (11 Punkte):
Für eine Funktion $h : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} v_1(x_1,x_2,x_3) \\ v_2(x_1,x_2,x_3) \\ v_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} = h(x_1+x_2+x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\triangle v_1$, $\triangle v_2$, $\triangle v_3$.

(b) Bestimmen Sie h mit $h(1) = 1$ und $h'(1) = 1$, so dass das Vektorfeld v die Bedingung

$$\triangle v_1 + \triangle v_2 + \triangle v_3 = 0$$

erfüllt.

Hinweis: Machen Sie die Substitution $u = x_1 + x_2 + x_3$.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^4}\,dx.$$

Aufgabe 6 (9 Punkte):

(a) Parametrisieren Sie folgende Fläche:
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 6y^2 = z, z \in [0,h]\}$, $h > 0$.

(b) Berechnen Sie den Einheitsnormalenvektor an D in $\left(0, \sqrt{\frac{h}{12}}, \frac{h}{2}\right)$.

Name:		**Matrikel–Nr.:**	

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- Auf dieser Seite genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Die Angabe eines Lösungsweges oder einer Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 7 (8 Punkte): Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\,(n+1) - \sqrt{4\,n^2+n-2}\right) = \boxed{}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\dfrac{(3\,n+1)\,(n-1)}{(3\,n-1)\,(n+1)} - 1\right) = \boxed{}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\,x)^{2/x} = \boxed{}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\sin(x)}{1-\cos(x)} = \boxed{}$

Aufgabe 8 (8 Punkte):

a) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?
Antworten Sie nur mit 'j' für 'ja' bzw. 'n' für 'nein'. Beachten Sie, dass in dieser Teilaufgabe für falsche Antworten negative Punkte vergeben werden.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?
Geben Sie den **maximalen** Konvergenzbereich an.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+x)^n}{n2^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(4+\sqrt{n})^n}$