Prof. Dr. C. Rohde
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **3. 3. 2008**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter.
- Bei den **Aufgaben 1-6** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In dieser Klausur können bis zu **44 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse sind über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (studIUS) zu erfragen. (https://studius.uni-stuttgart.de/)

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (7 Punkte): Finden Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - e^t . \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): Bestimmen Sie die Lösung des nichtlinearen Randwertproblems

$$\ddot{u}(x) = \frac{1}{4(\dot{u}(x))^3}\,, \quad x \in (0,1)$$

$$\dot{u}(0) = 0\,,\ u(1) = 0\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $y = \dot{u}$ und Trennung der Variablen.

Aufgabe 3 (7 Punkte):
Finden Sie eine Möbiustransformation $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit
$f(0) = 3$, $f(1) = \frac{4}{3}$, $f(i) = 1 - i$ und $f(\infty) \neq 0$.

Hinweis: Wegen $f(\infty) \neq 0$ kann der Ansatz $f(z) = \frac{z+b}{cz+d}$ gemacht werden.

Aufgabe 4 (8 Punkte): Berechnen Sie das Wegintegral 2. Art $I = \oint_C f\,dz$ für

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

entlang des Randes $C := \partial V$ von

$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\right\}.$$

Aufgabe 5 (9 Punkte): Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y) = e^x \cos\ y + e^y \sin\ x\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass f harmonisch ist.

(ii) Begründen Sie die Aussage "f kann Realteil einer holomorphen Funktion sein".

(iii) Bestimmen Sie einen Imaginärteil $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass

$$F(z) = f(x,y) + ig(x,y)$$

holomorph ist.

(iv) Schreiben Sie F als eine explizite Funktion von z, so dass

$$F(z) = f(x,y) + ig(x,y) \qquad (z = x + iy)\,.$$

Aufgabe 6 (7 Punkte): Berechnen Sie das Oberflächenintegral der Funktion

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z \\ 5y \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf der Oberfläche einer Kugel

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$$

mit dem Radius $r > 0$.
Hinweis: Beachten Sie $\sin^3 t = \sin t(1 - \cos^2 t)$ und $\cos^3 t = \cos t(1 - \sin^2 t)$.