Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. C. Rohde

Höhere Mathematik I–III **Diplomvorprüfung** **4. 3. 2008**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, geod, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- In dieser Klausur können bis zu **46 Punkte** erreicht werden.

Aufgabe 1 (9 Punkte): Parametrisieren Sie folgende Fläche:

(a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 6y^2 = z, z \in [0,h]\}$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

$$\omega(\varphi, r) = \begin{pmatrix} \sqrt{r}\cos\varphi \\ \sqrt{\frac{r}{6}}\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi),\ r \in [0, h].$$

(b) Ferner gilt:

$$\omega_\varphi(\varphi, r) = \begin{pmatrix} -\sqrt{r}\sin\varphi \\ \sqrt{\frac{r}{6}}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_r(\varphi, r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\varphi \\ \frac{1}{2\sqrt{6r}}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \omega_\varphi \times \omega_r &= \begin{pmatrix} \omega_{\varphi,2}\omega_{r,3} - \omega_{\varphi,3}\omega_{r,2} \\ \omega_{\varphi,3}\omega_{r,1} - \omega_{\varphi,1}\omega_{r,3} \\ \omega_{\varphi,1}\omega_{r,2} - \omega_{\varphi,2}\omega_{r,1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{r}{6}}\cos\varphi \\ \sqrt{r}\sin\varphi \\ -\sqrt{r}\sin\varphi\,\frac{1}{2\sqrt{6r}}\sin\varphi - \sqrt{\frac{r}{6}}\cos\varphi\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{r}{6}}\cos\varphi \\ \sqrt{r}\sin\varphi \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt: $\omega(\frac{\pi}{2}, \frac{h}{2}) = \left(0, \sqrt{\frac{h}{12}}, \frac{h}{2}\right)$. Also folgt:

$$n\left(0, \sqrt{\frac{h}{12}}, \frac{h}{2}\right) = \frac{\omega_\varphi \times \omega_r(\frac{\pi}{2}, \frac{h}{2})}{\left|\omega_\varphi \times \omega_r(\frac{\pi}{2}, \frac{h}{2})\right|}$$
$$= \sqrt{\frac{24}{12h+1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{h}{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{12h+1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{h}{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte): Es gilt

$$\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{(x^2+2i)(x^2-2i)} = \frac{1}{(x-1-i)(x+1-i)(x-1+i)(x+1+i)}.$$

Da der Grad des Nenners $n = 4$ und der Grad des Zählers $m = 0$ ist, gilt $n \geq m + 2$. Aus der Vortragsübung ist bekannt, dass daher

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^4} = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{4+z^4}, 1+i\right) + 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{4+z^4}, -1+i\right) \\
= \;& 2\pi i \lim_{z\to 1+i} \frac{1}{(z+1-i)(z-1+i)(z+1+i)} \\
& +2\pi i \lim_{z\to -1+i} \frac{1}{(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)} \\
= \;& \frac{2\pi i}{(1+i+1-i)(1+i-1+i)(1+i+1+i)} \\
& + \frac{2\pi i}{(-1+i-1-i)(-1+i-1+i)(-1+i+1+i)} \\
= \;& \frac{2\pi i}{2(2i)(2+2i)} + \frac{2\pi i}{(-2)(-2+2i)(2i)} \\
= \;& \frac{\pi}{4+4i} + \frac{\pi}{4-4i} \\
= \;& \frac{\pi(4-4i)+\pi(4+4i)}{16+16} \\
= \;& \frac{8\pi}{32} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der folgenden Funktion in komplexer und in Sinus-Cosinus-Form.
$f(x) = 3|x - 2\pi l| + 2$ für $x \in [(2l-1)\pi, (2l+1)\pi]$, $l \in \mathbb{Z}$,
Es gilt:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \qquad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k).$$

Also folgt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3|x| + 2)\,dx = 3\pi + 4.$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3|x|+2)\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 3x\cos(kx)\,dx - \int_{-\pi}^{0} 3x\cos(kx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{3}{k}x\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{3}{k}\sin(kx)\,dx - \left[\frac{3}{k}x\sin(kx)\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{3}{k}\sin(kx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{k^2}\left[\cos(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{3}{k^2}\left[\cos(kx)\right]_{-\pi}^{0}\right) \\
&= \frac{6}{\pi k^2}((-1)^k - 1).
\end{aligned}$$

$b_k = 0$, da f gerade. $c_0 = \frac{3\pi}{2} + 2$, $c_{\pm k} = \frac{3}{\pi k^2}((-1)^k - 1)$.

Aufgabe 4 (7 Punkte):

$$2(x+1)e^{2y}dy + (e^{2y} - 2x)dx = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \qquad x > 0\,.$$

$$P(y,x) = e^{2y} - 2x \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{2y}$$

$$Q(y,x) = 2e^{2y}(x+1) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{2y}$$

Suche nach $U(y,x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ mit

$$\nabla U(y,x) = \begin{pmatrix} Q(y,x) \\ P(y,x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0 \iff U(y,x) = C \,(\text{Konstante})$$

$$U(y,x) = \int_{x_0}^{x} P(y_0, s)ds + \int_{y_0}^{y} Q(\zeta, x)d\zeta\,,$$

mit $(y_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ fest und $(y,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$$U(y,x) = \int_{x_0}^{x} (e^{2y_0} - 2s)ds + \int_{y_0}^{y} 2e^{2\zeta}(x+1)d\zeta\,.$$

Wähle $y_0 = 0\,,\ x_0 = 0$

$$\begin{aligned} U(y,x) &= \int_0^x (1-2s)ds + \int_0^y 2e^{2\zeta}(x+1)d\zeta \\ &= x - x^2 + (x+1)\cdot(e^{2y} - 1), \end{aligned}$$

also ist

$$C = (x+1)e^{2y} - (x+1) - x^2 + x.$$

$$\iff (x+1)e^{2y} = C + x^2 + 1$$

$$\iff e^{2y} = \frac{x^2+1+C}{x+1}$$

$$\implies y(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1+C}{x+1} \qquad y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

$$0 = y(0) = \frac{1}{2}\ln(C+1) \iff C = 0$$

$$\implies y(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x+1}\,.$$

Maximaler Definitionsbereich ist $\mathbb{R}_+$.

Aufgabe 5 (11 Punkte):

$$v(x) = h(x_1 + x_2 + x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = 0.$$

Substitution: $u := x_1 + x_2 + x_3$.

(a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= h'(u)x_1 + h(u) \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} &= h''(u)x_1 + 2h'(u) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= h'(u)x_1 \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} &= h''(u)x_1 \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} &= h''(u)x_1. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \Delta v_1 &= 3h''(u)x_1 + 2h'(u) \\ \Delta v_2 &= 3h''(u)x_2 + 2h'(u) \\ \Delta v_3 &= 3h''(u)x_3 + 2h'(u). \end{aligned}$$

(b)

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = 3h''(u)u + 6h'(u).$$

$$\Longrightarrow h''(u) = -\frac{2}{u}h'(u), \qquad h(1) = 1\,,\; h'(1) = 1.$$

Substitution $h'(u) = y(u)$.

$$\Longrightarrow \dot{y}(u) = -\frac{2}{u}y(u) \qquad y(1) = 1.$$

Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} g(u) &= -\tfrac{2}{u} \Longrightarrow G(u) = -2\ln u \\ H(y) &= \tfrac{1}{y} \Longrightarrow H(y) = \int_1^y \tfrac{1}{\zeta}d\zeta = \ln y \end{aligned}$$

$$H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad H^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad H^{-1}(y) = e^y$$

$$\Longrightarrow y(u) = \mathcal{H}^{-1}(-2\ln u) = e^{-2\ln u} = \frac{1}{u^2}, \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$\Longrightarrow h'(u) = \frac{1}{u^2}, \qquad h(1) = 1.$$

$$\Longrightarrow h(u) = 2 - \frac{1}{u}, \qquad h : [1, \infty) \to \mathbb{R}.$$