Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Rump

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **03.03.08**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
aer

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Es gibt insgesamt **5 Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter.
- Bei den **Aufgaben 1–3** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In dieser Klausur können bis zu **56 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Mitte April im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock (bei dem Seminarraum 7.527) durch Aushang bekannt gegeben (Ankündigung auf der Homepage zu HM III).

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.
Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (7 Punkte): Gegeben sei die komplexe Funktion $f(z) = \dfrac{1}{3z^2 + 10z + 3}$.

a) Bestimmen Sie die Residuen von f.

b) Berechnen Sie $I(R) = \oint\limits_{|z|=R} f(z)\,dz$ für $R = \frac{1}{4}, 1, 4$ (alle Kurven mit positivem Umlaufsinn).

c) Berechnen Sie $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{5 + 3\cos x}$ mit Hilfe der Identität $\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und der Substitution $z = e^{ix}$.

Aufgabe 2 (13 Punkte):
Gegeben sei die Fläche $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\,,\ z = 4 + 2xy\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,y \\ \frac{1}{2}\,x \\ 2 + xy - \frac{1}{2}\,z \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie den nach oben weisenden Normalenvektor $\vec{n}$ von D (in xyz-Koordinaten). Berechnen Sie damit den Flächeninhalt von D.

b) Geben Sie eine Parametrisierung $\vec{r}$ der (bzgl. der xy–Ebene positiv orientierten) Randkurve C von D an und berechnen Sie direkt das Kurvenintegral $\int\limits_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ längs C.

c) Bestätigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes unter Berechnung des Flusses von $\operatorname{rot} \vec{v}$ von unten nach oben durch D das Ergebnis aus **b)**.

Hinweis: Verwenden Sie hierbei den Normalenvektor aus **a)**.

Aufgabe 3 (12 Punkte): Es sei f die 2π–periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = -\pi \\ 0 & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \leq x < \pi \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = \pi \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

b) f soll in eine Fourierreihe $\tilde{f}$ entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten a_k, b_k für $k = 0, 1, 2, \ldots$ der zugehörigen Fourierreihe

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\tilde{f}(x) = f(x)$?

c) Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourierreihe an der Stelle $x = 0$ den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

d) Es sei $g(x) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \quad (A_0, A_n,\ B_n \in \mathbb{R})$.
Bestimmen Sie die Fourierreihen von

$$\frac{1}{2}(g(x) + g(-x)) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(g(x) - g(-x)).$$

e) Bestimmen Sie mit Hilfe von **b)** und **d)** die Funktion, die durch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ dargestellt wird.

Name: ☐ **Matrikel–Nr.:** ☐

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- Auf diesem Blatt genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.
- **Bitte beachten Sie auch die Aufgabe auf der Rückseite des Blattes.**

Aufgabe 4 (12 Punkte): Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$(3x - 2t) \cdot y_x(x,t) + (2x - 3t) \cdot y_t(x,t) + 2 \cdot (t^2 - x^2) \cdot y(x,t) = 0.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x} = \boxed{}\,, \quad \dot{t} = \boxed{}$$

b) Bestimmen Sie daraus die Phasen-DGL: $\frac{dx}{dt} = \boxed{}$

c) Bringen Sie diese DGL in die Form $p(x,t)\,dx + q(x,t)\,dt = 0$ mit Funktionen

$$p(x,t) = 2x - 3t \quad \text{und} \quad q(x,t) = \boxed{}\,.$$

d) Bestimmen Sie die für die exakte DGL in (c) eine Potentialfunktion u (also mit $u_x = p$ und $u_t = q$):

$$u(x,t) = \boxed{}$$

e) Ergänzen Sie $u(x,t)$ durch $v(x,t) = x \cdot t$ zu einer außerhalb der Winkelhalbierenden umkehrbaren Substitution, und berechnen Sie mittels der Kettenregel:

$$y_x = y_u \cdot \boxed{} + y_v \cdot \boxed{}$$

$$y_t = y_u \cdot \boxed{} + y_v \cdot \boxed{}$$

f) Reduzieren Sie damit die gegebene PDG auf eine gewöhnliche DGL (bei festgehaltener Variable u):

$$y_v = \boxed{}$$

g) Bestimmen Sie aus der allgemeinen Lösung der DGL in **f)** die allgemeine Lösung der gegebenen PDG:

$$y(x,t) = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (12 Punkte): Gegeben sei die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) (i) Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$

(ii) A besitzt die Eigenvektoren: $\vec{v}_1 = \boxed{}$, $\vec{v}_2 = \boxed{}$, $\vec{v}_3 = \boxed{}$

(iii) Die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$ lautet:

$\vec{y}_{hom}(x) = \boxed{}$

b) Bestimmen Sie für das inhomogene System

$$\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \vec{b} \cdot e^{-x} \quad (1)$$

eine partikuläre Lösung $\vec{y}_p$ mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

Ansatz: $\vec{y}_p(x) = \boxed{}$

Eine partikuläre Lösung von (1) lautet:

$\vec{y}_p(x) = \boxed{}$

c) Geben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (1) an.

$\vec{y}(x) = \boxed{}$

d) Für welchen Parameter $d \in \mathbb{R}$ und welche der Lösungen aus **a)** gilt $\lim\limits_{x \to \infty} e^{d\,x}\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$d = \boxed{}$, $\quad \vec{y}(x) = \boxed{}$