Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. C. Hesse

Höhere Mathematik I–II **Diplomvorprüfung** **4. 3. 2008**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, geod, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter.
- Bei den **Aufgaben 1–4** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die folgenden Angaben könnten hilfreich sein:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Potenzreihen:

$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$	$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad -1 \le x < 1$

- In dieser Klausur können bis zu **54 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Mitte April im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, neben Raum 8.556 durch Aushang bekannt gegeben (Ankündigung auf der alten Homepage zu HM 2).

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (11 Punkte): Gegeben sei die Geradenschar

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ -2+5a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3+2a \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Ferner sei h die Gerade

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g_0 und g_1 in einer Ebene E liegen und geben Sie die Gleichung von E in Koordinatendarstellung an.

Weisen Sie nach, dass alle Geraden g_a für $a \in \mathbb{R}$ in der Ebene E liegen.

b) Zeigen Sie, dass h parallel zu E ist und berechnen Sie den Abstand von h zu E.

c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a, ob die Geraden h und g_a parallel oder windschief sind.

d) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Abstand von h zu g_a.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Für fest gewählten Parameter $a > 0$ sei die Funktion f_a definiert durch

$$f_a(t) := \sqrt{\frac{1}{a^2} - t} \quad \left(t \leq \frac{1}{a^2}\right).$$

a) Berechnen Sie für f_a das eindimensionale Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $t = 0$ in Abhängigkeit des Parameters a.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) für die Funktion

$$g(x, y) = f_2(y) \cdot \frac{1 - f_1(x)}{x} \quad \left(x \leq 1, y \leq \frac{1}{4}\right)$$

das zweidimensionale Taylorpolynom der Ordnung 1 an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$.

Aufgabe 3 (9 Punkte): Die Matrix B sei gegeben durch

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte von B.

b) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren und Hauptvektoren von B.

c) Geben Sie die Jordan-Normalform von B an.

Aufgabe 4 (10 Punkte):

a) Zerlegen Sie das Polynom

$$p(z) = z^4 - 7z^3 + 18z^2 - 22z + 12$$

in ein Produkt

i) unzerlegbarer reeller Polynome,

ii) linearer reeller und komplexer Polynome.

Hinweis: Das Polynom p besitzt die komplexe Nullstelle $1 + i$.

b) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z = \left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^3 \cdot (1+i)$

i) in Normalform $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$,

ii) in der trigonometrischen Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Bitte beachten Sie auch die Aufgaben auf der Rückseite!

Name:		Matrikel–Nr.:	

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- Auf dieser Seite genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.

Aufgabe 5 (8 Punkte): Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\,(n+1) - \sqrt{4\,n^2+n-2}\right) = \boxed{}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\dfrac{(3\,n+1)\,(n-1)}{(3\,n-1)\,(n+1)} - 1\right) = \boxed{}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\,x)^{2/x} = \boxed{}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\sin(x)}{1-\cos(x)} = \boxed{}$

Aufgabe 6 (8 Punkte):

a) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?
Antworten Sie nur mit 'j' für 'ja' bzw. 'n' für 'nein'. Beachten Sie, dass in dieser Teilaufgabe für falsche Antworten negative Punkte vergeben werden.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?
Geben Sie den **maximalen** Konvergenzbereich an.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+x)^n}{n2^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(4+\sqrt{n})^n}$