Mathematatik I für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur für alle gemeldeten Fachrichtungen außer Immobilientechnik und Immobilienwirtschaft

am 29.06.2007, 14.00–16.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden. Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$ und des Binomialkoeffizienten z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 10 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allginfo.pdf” im Verzeichnis “`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_WS0607/`”.

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Ein Betrieb stellt auf vier Anlagen A, B, C, D zwei Produkte P, R her, wobei jedes der beiden Produkte alle vier Anlagen durchlaufen muss, aber die Produktionsreihenfolge beliebig ist. Die Bearbeitungszeiten pro kg sind:

Anlage	Bearbeitungszeit in Stunden für Produkt P	R
A	5	16
B	6	10
C	10	10
D	18	7

Wöchentlich kann Anlage A höchstens 40 Stunden, Anlage B höchstens 30 Stunden, Anlage C höchstens 40 Stundenund Anlage D höchstens 63 Stunden benutzt werden. Der Rohgewinn pro kg beträgt bei P 20 Euro und bei R 40 Euro. Wieviel kg von P und wieviel kg von R müssen hergestellt werden, um einen möglichst großen Gesamtgewinn zu erzielen? Es genügt eine graphisch ermittelte Lösung im Rahmen der verfügbaren Zeichen– und Ablesegenauigkeit.

Hinweise: i) Für die graphische Lösung dieses Aufgabenteils steht Ihnen ein Millimeterpapierblatt zur Verfügung (Es kann aber auch anderes z.B. kariertes Papier benutzt werden). Bei Bedarf kann ein zweites zur Verfügung gestellt werden.
ii) Als "Mustergerade" für die Geraden konstanten Gesamtgewinns ist die Gerade für den Gesamtgewinn von 80 Euro günstig.
iii) Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $40/16 = 2.5$, $63/18 = 3.5$.

Aufgabe 2 **14 Punkte**

a) Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{10n^5 - 3n^3}{5n^3 + 5n^2}, \quad b_n := \frac{(n-2)^4}{6n^4 + n}, \quad c_n := \sqrt{5n^8 + n^4} - \sqrt{5n^8}.$$

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to(-5)} f(x), \quad \lim_{x\to 2+} f(x), \quad \lim_{x\to 2-} f(x) \text{ und } \lim_{x\to 2} f(x)$$

$$\text{mit } f(x) := \frac{-x^3 - 5x^2 + x + 5}{x^2 + 3x - 10}.$$

Aufgabe 3 **8 Punkte**

Bei einem Ratensparvertrag wird ein nomineller Jahreszinssatz von 3.6% vereinbart.

a) Es werden vom 1. Januar 2008 bis zum 1. Oktober 2012 am 1. Januar, 1. April, 1. Juli und 1. Oktober jeden Jahres jeweils 400 Euro eingezahlt. Über welchen Betrag kann am 31.12.2012 verfügt werden, wenn die Zinsen

- **i)** am Ende jeden Vierteljahres gutgeschrieben werden?
- **ii)** am Ende jedes Jahres gutgeschrieben werden?

b) Statt der vierteljährlichen Einzahlung und Zinsgutschrift soll am Anfang jeden Jahres ein fester Betrag E vom 1. Januar 2008 bis zum 1. Januar 2012 bei jährlicher Zinsgutschrift eingezahlt werden. Wie groß muss E sein, damit am 31.12.2012 über einen Betrag von 9000 Euro verfügt werden kann?

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Ein Kredit in Höhe von 40000 Euro soll mit einem Jahreszinssatz von 6% zurückgezahlt werden.

a) Wie hoch ist nach 10 Jahren die Summe der angefallenden Zinsen, wenn am Ende jeden Halbjahres 2000 Euro und die angefallenden Zinsen zurückgezahlt werden?

b) Wie hoch ist die Restschuld nach 10 Jahren, wenn am Ende jeden Halbjahres nur der Betrag von 2000 Euro zurückgezahlt wird?

Aufgabe 5 **4 Punkte**

In eine Anlage, die 6 Jahre lang betrieben wird, werden 40000 Euro am Anfang des ersten Jahres investiert. Es wird ein Jahreszinssatz von 25% zugrundegelegt. Die in den sechs Jahren erwarteten Einzahlungsüberschüsse, die jeweils am Jahresende dem Betrieb zufließen, seien alle gleich. Über welchem Wert muss der in jedem Jahr erzielte Einzahlungsüberschuss R liegen, damit sich die Investion lohnt?

Aufgabe 6 **10 Punkte**

a) Vorgegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + 10.$$

Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion monoton wachsend ist, und die Intervalle, in denen sie monoton fallend ist. (Dabei soll jedes $x \in \mathbb{R}$ zu mindestens einem der Intervalle gehören.) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, alle Stellen, an denen $f(x)$ ein (relatives) Maximum besitzt, und alle Stellen, an denen $f(x)$ ein (relatives) Minimum besitzt.

b) Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion

$$g(x) := x^2 - 6x + 4$$

auf dem Intervall $[0,\ 10]$.

Aufgabe 7 **4 Punkte**

An welcher Stelle besitzt der Graph der Funktion

$$f(x, y) := x^2 + 2xy + 2y^2 - 8x - 9y + 10$$

eine waagerechte Tangentialebene?

Aufgabe 8 **7 Punkte**

Berechnen Sie den (endlichen und positiven) Flächeninhalt zwischen den Kurven zu $f(x) := x^3 + x$ und $g(x) := 6 - 4x^2$.