Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 26.07.2007, 09.00 – 11.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten, des Betrages, des Skalarproduktes und des Vektorproduktes z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 10 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allginfo.pdf” im Verzeichnis “`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_SS07/`”.

Aufgabe 1 **5 Punkte**

a) Prüfen Sie ob der folgende Grenzwert existiert und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-x}.$$

b) Prüfen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Wert:

$$\int_0^\infty (4x-1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

Aufgabe 2 **13 Punkte**

Für welche(n) Wert(e) des Parameters p besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 4\,x_2 & - & 4\,x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 2\,p\,x_2 & + & p\,x_3 & = & p \\ -x_1 & + & (p+14)\,x_2 & - & 10\,x_3 & = & 5 \end{array}$$

i) eine (i.a. von p abhängige) eindeutige Lösung,

ii) mehr als eine Lösung,

iii) keine Lösung?

Bestimmen Sie im Fall **ii)** die Lösungsmenge (oder die allgemeine Lösung) und für $p=-1$ die Lösung des obigen linearen Geichungssystems.
Hinweis: Verwenden Sie zur Vereinfachung der Zahlenrechnung die Rechenergebnisse:
$\sqrt{14^2+32\cdot 4}=18$ und $30/45=2/3$.

Aufgabe 3 **13 Punkte**

Gegeben seien die beiden Ebenen

$$E_1 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Gleichungsdarstellungen der Ebenen E_1 und E_2.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α und die Schnittgerade g der Ebenen E_1 und E_2.

– bitte wenden –

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Bestimme Sie den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 11 & -9 \\ 8 & 4 & 16 & -24 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 **3 Punkte**

Die Abhängigkeit der Nachfrage einer Ware vom Preis p sei durch $N(p) := 10-2\,p$ beschrieben. In welchem Teilintervall von $0 < p < 5$ reagiert die Nachfrage elastisch, d.h. in welchem Teilintervall von $0 < p < 5$ gilt $|\varepsilon_N(p)| > 1$?

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wobei auch ∞ als Grenzwert zugelassen ist):

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos(x^2)}{x\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0+} x\cdot \ln(x^2+x), \qquad \lim_{x\to 0+} (\cos x)^{1/x}.$$

Aufgabe 7 **11 Punkte**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) := 2xy^2 + 4x^2 + 2y^2$ auf relative Extrema einschließlich der Klärung, ob es sich um ein relatives Maximum oder Minimum handelt.

Aufgabe 8 **15 Punkte**

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

a)

$$y'(x) = \frac{\left(y(x)\right)^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 2.$$

b)

$$y''(x) + 4y(x) = 8x^2 - 16x + 4, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -8.$$