Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur für alle gemeldeten Fachrichtungen außer Immobilientechnik und Immobilienwirtschaft

am 27.06.2008, 14.00–16.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten und des Betrages z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 15 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allginfo.pdf” im Verzeichnis “`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_WS0708/`”.

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Ein Betrieb besitzt zwei Abfallverbrennungsanlagen, deren Abgase die Schadstoffe A, B, C und D enthalten. Während einer Betriebsstunde verbrennt die
Anlage I 10 Tonnen Abfall und erzeugt dabei 3g Stoff A, 5g Stoff B, 6g Stoff C und 9g Stoff D,
Anlage II 10 Tonnen Abfall und erzeugt dabei 10g Stoff A, 9g Stoff B, 8g Stoff C und 4g Stoff D.
Der Betrieb darf aus beiden Anlagen zusammen täglich 30g von Stoff A, 45g von Stoff B, 48g von Stoff C und 36g von Stoff D an die Atmosphäre abgeben.
Zeichnen Sie *alle* Geraden, die zu den Nebenbedingungen gehören.
Wie viele Stunden täglich wird man die beiden Anlagen jeweils betreiben, um bei Einhaltung der Vorschriften eine möglichst große Menge Abfall zu verbrennen? Wie viele Tonnen Abfall werden dann verbrannt?
Sie dürfen dabei ohne Prüfung davon ausgehen, dass die genannten Nebenbedingungen bereits eine Betriebsstundenzahl ≤ 24 implizieren.

Hinweise: i) Für die graphische Lösung steht Ihnen ein Millimeterpapierblatt zur Verfügung (Es kann aber auch anderes z.B. kariertes Papier benutzt werden). Bei Bedarf kann ein zweites zur Verfügung gestellt werden.
ii) Als "Mustergerade" für die Geraden konstanter Abfallmenge ist die Gerade für die Abfallmenge von 50 Tonnen günstig.

Aufgabe 2 **9 Punkte**

a) Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{15n^4 + 14n + 1}{-12n^3 + 100n}, \quad b_n := \sqrt{12n^4 + n^3} - \sqrt{12n^4 - n^3}.$$

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x}{5x^5 - x^2}, \quad \lim_{x\to 1-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Bei einem Ratensparvertrag wird ein nomineller Jahreszinssatz von 6% vereinbart.

a) Es werden vom 1. Januar 2008 bis zum 1. September 2016 am 1. Januar, 1. Mai und 1. September jeden Jahres jeweils 500 Euro eingezahlt. Über welchen Betrag kann am 31.12.2016 verfügt werden, wenn die Zinsen am Ende jeden Dritteljahres gutgeschrieben werden?

b) Statt der dritteljährlichen Einzahlung und Zinsgutschrift soll am Anfang jeden Jahres ein fester Betrag R vom 1. Januar 2008 bis zum 1. Januar 2016 bei jährlicher Zinsgutschrift eingezahlt werden. Wie groß muss R sein, damit am 31.12.2016 über einen Betrag von 18 000 Euro verfügt werden kann?

Aufgabe 4 **5 Punkte**

Ein Kredit in Höhe von 10 000 Euro soll mit festen jährlichen Beträgen A zurückgezahlt werden, und zwar jeweils am Ende des Jahres. Der Zinssatz betrage 7%. Wie groß muss A sein, damit der Kredit nach 20 Jahren vollständig abgezahlt ist? Wie hoch ist am Ende des ersten, wie hoch am Ende des letzten Jahres der reine Tilgungsbetrag?

Aufgabe 5 **5 Punkte**

In eine Anlage, die zehn Jahre lang betrieben wird, werden 100 000 Euro am Anfang des ersten Jahres investiert. Es wird ein Jahreszinssatz von 25% zugrundegelegt. Die in den zehn Jahren erwarteten Einzahlungsüberschüsse, die jeweils am Jahresende dem Betrieb zufließen, seien alle gleich. Über welchem Wert muss der in jedem Jahr erzielte Einzahlungsüberschuss R liegen, damit sich die Investition lohnt?

Aufgabe 6 **12 Punkte**

a) Vorgeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - 9x^2 + 3x - 20\,.$$

Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion konvex (Linkskrümmung) ist, und die Intervalle, in denen sie konkav (Rechtskrümmung) ist. (Dabei soll jedes $x \in \mathbb{R}$ zu mindestens einem der Intervalle gehören.) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, alle Wendestellen.

b) Bestimmen Sie – soweit vorhanden – das absolutes Maximum und das absolute Minimum der Funktion

$$g(x) := \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x - 20$$

auf dem Intervall $[-1, 3]$.

Aufgabe 7 **6 Punkte**

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, den Flächeninhalt des von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ aufgespannten Parallelogramms und das Volumen des von den drei Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ aufgespannten Spats.

Aufgabe 8 **15 Punkte**

a) Berechnen Sie die (endliche) absolute Fläche zwischen den Kurven zu $f(x) := x^3 + 3x^2$ und $g(x) := x + 3$.

b) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^1 (x+1) \cdot e^x \ \mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^1 3x^2 \cdot \exp(x^3) \ \mathrm{d}x\,, \quad \exp u := e^u.$$

c) Prüfen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert:

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \ \mathrm{d}x\,.$$