Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Rump

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **02.09.08**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
aer

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Es gibt insgesamt **5 Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter, Tabelle für die Laplace-Transformation
- Bei den **Aufgaben 1–3** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In dieser Klausur können bis zu **55 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Mitte Oktober im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock (bei dem Seminarraum 7.527) durch Aushang bekannt gegeben (Ankündigung auf der alten Homepage zu HM III).

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) := (x^2+y^2+z, x+z, x^2-y+3)^\top$ sowie das Flächenstück $F_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2+y^2 \le R^2, z = R^2-x^2-y^2\}$ ($R \in \mathbb{R}$ fest).

a) Geben Sie eine Parametrisierung $\vec{r}$ der (bzgl. der $xy-$Ebene positiv orientierten) Randkurve C_R von F_R an und berechnen Sie direkt das Kurvenintegral $\int\limits_{C_R} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ längs C_R.

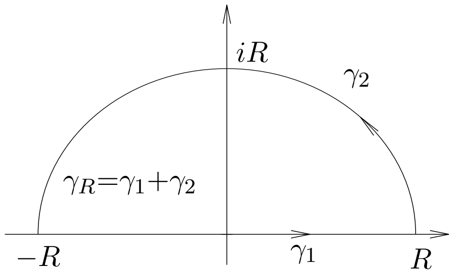
b) Bestätigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes unter Berechnung des Flusses von $\operatorname{rot}\vec{v}$ von unten nach oben durch F_R das Ergebnis aus **a)**.

Aufgabe 2 (9 Punkte): Gegeben sei die komplexe Funktion $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(1+z)^2+1}$.

a) Bestimmen Sie die Residuen von f.

b) Sei

- γ_1 die Strecke von $-R$ nach R,
- γ_2 die positiv orientierte Halbkreislinie um 0 vom Radius R in der oberen Halbebene mit der Parameterdarstellung $z = Re^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$
- und $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$ (Siehe Skizze).



Berechnen Sie $\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz$ für $R > \sqrt{2}$.

c) Zeigen Sie: $\lim\limits_{R\to\infty} \left| \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| = 0.$

d) Bestimmen Sie nun $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz$ und damit die Integrale

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x}{(1+x)^2+1}\,dx$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x}{(1+x)^2+1}\,dx.$

Aufgabe 3 (10 Punkte): Sei $g : [0,\pi] \mapsto \mathbb{R}$ mit $g(x) = x(\pi - x)$.

a) Bestimmen Sie f so, dass

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } \; 0 \le x \le \pi \\ g(-x) & \text{für } -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

gilt, also f eine gerade Funktion ist. Skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der $2\pi-$periodischen Fortsetzung von f.

Geben Sie die ersten 7 Glieder der Reihe explizit an.

c) An welchen Stellen stimmt die Fourierreihe mit der Funktion überein?

Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourierreihe an einer speziellen Stelle den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Welchen Reihenwert erhält man, wenn die Fourierreihe bei $x = \dfrac{\pi}{2}$ ausgewertet wird?

Name: | | **Matrikel–Nr.:** | |

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- Auf diesem Blatt genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.
- **Bitte beachten Sie auch die Aufgabe auf der Rückseite des Blattes.**

Aufgabe 4 (12 Punkte):
Gegeben sei die partielle DGL

$$3ty_x + xy_t = (x^2t - 3t^3) \cdot y.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische DGL-System:

$$\dot{x} = \boxed{}, \quad \dot{t} = \boxed{}$$

b) und daraus die Phasen-DGL:

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{}$$

c) Bestimmen Sie ein erstes Integral:

$$u(x,t) = \boxed{}$$

d) Mit der Substitution $u = u(x,t)$, $v = x$ ergibt sich dann

$$y_x = \boxed{} \cdot y_u + \boxed{} \cdot y_v \qquad y_t = \boxed{} \cdot y_u + \boxed{} \cdot y_v$$

e) Die partielle DGL geht damit über in

$$y_v = \boxed{}$$

f) Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x,t) = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (14 Punkte): Gegeben sei die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R})$$

a) (i) Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$.

(ii) A besitzt die Eigenvektoren: $\vec{v}_1 = \boxed{}$, $\vec{v}_2 = \boxed{}$, $\vec{v}_3 = \boxed{}$.

(iii) Die allgemeine **komplexe** Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$ lautet

$\vec{y}_{kompl.}(x) = \boxed{}$

(iv) Die allgemeine **reelle** Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$ lautet

$\vec{y}_{reell}(x) = \boxed{}$

b) Bestimmen Sie für das inhomogene System

$$\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \cos(x) \cdot \vec{b} \qquad (\mathbf{1})$$

eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

Ansatz: $\vec{y}_p(x) = \boxed{}$

Damit ergibt sich eine partikuläre Lösung zu:

$\vec{y}_p(x) = \boxed{}$