IADM, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

PD Dr. P. H. Lesky

Diplomvorprüfung Mathematik für inf, tpinf, sotech 06.03.2009

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- Verlangt und gewertet werden **alle 8 Aufgaben**.
- In der Klausur können maximal **59 Punkte** erreicht werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Keine.
- Bei der Bearbeitung der Aufgaben sind alle Lösungsschritte und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen das ausgeteilte Papier und beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
- Die folgenden Funktionswerte könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:** Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
  Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, erhalten die nötigen Informationen auf der Homepage der Vorlesung.

  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (7 Punkte): Gegeben ist die Gleichung $z^6 = -64$ für die komplexe Unbekannte z.

a) Geben Sie die Zahl $a = -64 \in \mathbb{C}$ in Polardarstellung an.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen in Polardarstellung und skizzieren Sie deren Lage in der komplexen Zahlenebene.

c) Geben Sie für die Lösung, die die Bedingungen $\operatorname{Im}(z) < 0$ und $\operatorname{Re}(z) > 0$ erfüllt, den Real- und Imaginärteil explizit an.

Aufgabe 2 (3 Punkte): Gegeben sind zwei Vektorräume V und W über $\mathbb{R}$, eine lineare Abbildung $T : V \to W$ sowie eine endliche Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$.

a) Geben Sie eine Definition an für: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear unabhängig.

b) Beweisen Sie:
$\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ ist linear unabhängig $\Rightarrow$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 3 (7 Punkte): Gegeben ist die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x \, .$$

a) Bestimmen Sie $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von T an und die zugehörigen Eigenwerte.

c) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von T.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $D := S^{-1} \cdot A \cdot S$ Diagonalgestalt besitzt.

c) Geben Sie eine Formel für D^n $(n \in \mathbb{N})$ an und leiten Sie daraus mit dem Ergebnis von Teil a) eine Formel für A^n her.

Aufgabe 5 (8 Punkte): Bestimmen Sie für jede der angegebenen reellen Potenzreihen den Konvergenzradius und untersuchen Sie jeweils die Konvergenz am Rande des Konvergenzintervalls.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{n^3} x^n$, **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{x^3 - 3x}(1 + y^2).$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Berechnen Sie für jeden der kritischen Punkte die Hessematrix und geben Sie jeweils an, ob ein relatives Minimum, ein relatives Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 7 (5 Punkte): Gegeben ist das unbestimmte Integral

$$I = \int \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \qquad (x > 0).$$

Führen Sie die Substitution $u = \sqrt[4]{x}$ durch und berechnen Sie I.

Aufgabe 8 (9 Punkte): Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = (y + 1) \cdot \frac{1}{(x + 1)(x + 2)}, \qquad y(0) = 1.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (ohne Angabe des Definitionsbereichs).

b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems und ihren maximalen Definitionsbereich an.