Höhere Mathematik I/II **Prüfung** **10.03.09**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
el, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 6** Aufgaben. Alle Schritte sind ausreichend zu begründen, eine Angabe der Ergebnisse allein reicht nicht!
- Ergebnisse von unbearbeiteten Aufgaben dürfen im späteren Verlauf verwendet werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte April auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden. Ankündigung auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine direkt im Anschluss an die Klausureinsicht am 20.04.09 (14.00-17.15) vergeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Bilinearform $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{y}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt ist.

b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A und zeigen Sie, dass diese bezüglich b orthogonal sind.

c) Geben Sie eine Orthonormalbasis bezüglich b an.

d) Zeigen Sie, dass zu $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ die Menge $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : b(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. Geben Sie Basen der Eigen- und Haupträume an.
b) Geben Sie eine Jordan-Matrix J und eine Transformationsmatrix S an, so dass $J = S^{-1}AS$ gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Sei die Quadrik Q im $\mathbb{R}^2$ durch die Gleichung $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 3\sqrt{2}x_1 - 3\sqrt{2}x_2 = 0$ gegeben.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Transformationsmatrix S an, so dass $D = {}^tSAS$ gilt.
c) Bestimmen Sie die Normalform und den Typ der Quadrik Q.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Parameters t die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{pmatrix} 1 & t+1 & t-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1-2t & -t-1 & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t+1 \\ 1-2t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Im $\mathbb{R}^3$ seien die Körper $K_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z > 1\}$ und $K_2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 9, w - v > \sqrt{2}\}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie das Volumen von K_1.
b) Zeigen Sie, dass K_2 aus K_1 durch die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

hervorgeht.
c) Warum haben K_1 und K_2 das gleiche Volumen?