1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
el, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 6** Aufgaben. Alle Schritte sind ausreichend zu begründen, eine Angabe der Ergebnisse allein reicht nicht!
- Ergebnisse von unbearbeiteten Aufgaben dürfen im späteren Verlauf verwendet werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte April auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden. Ankündigung auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine direkt im Anschluss an die Klausureinsicht am 20.04.09 (14.00-17.15) vergeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

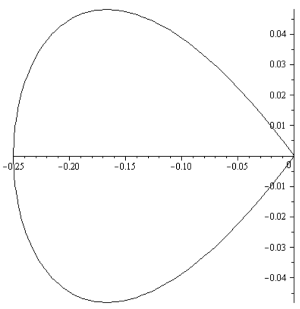
Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Über die Parametrisierung

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t(t-1) \\ t(t-\frac{1}{2})(t-1) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

ist eine geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^2$ gegeben.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche.



Aufgabe 2 (12 Punkte)
Für $x > 0$ sei die Differentialgleichung $y'(x) = \frac{2xy(x)}{x^2+y(x)^2}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Substitution $z = \frac{y}{x}$ für $z \notin \{0, 1, -1\}$ auf die Differentialgleichung $\frac{z'}{z} - \frac{z'}{z-1} - \frac{z'}{z+1} = \frac{1}{x}$ führt.
b) Lösen Sie die in a) entstandene Differentialgleichung.
c) Geben Sie alle Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung an.
Hinweis: Was passiert für $z \in \{0, 1, -1\}$?

Aufgabe 3 (12 Punkte)
Es sei die Differentialgleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} - (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Sei φ Integralkurve dieser Differentialgleichung mit $\varphi(0) = (1, 0)$.
Bestimmen Sie diese Lösung explizit.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Differentialgleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.
b) Sei nun φ eine Integralkurve mit Startwert $\varphi(0)$ innerhalb des Einheitskreises $x^2 + y^2 < 1$. Warum verbleibt diese Lösung zu allen Zeiten dort?
c) Zeigen Sie, dass in Polarkoordinaten $x(t) = r(t)\cos(\theta(t)), y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$ das System zu $r' = -r(r-1)^2, \theta' = 1$ äquivalent ist.
d) Folgern Sie nun, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt des Feldes ist und dass dieser stabil ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es seien die Funktionen $u(x, y) = 2xy$ und $v(x, y) = e^{x^2}y$ gegeben.
Sind u und v harmonisch? Können u und v Imaginärteile von holomorphen Funktionen sein? Bestimmen Sie gegebenenfalls den zugehörigen Realteil sowie eine zugehörige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$.
b) Es sei die Funktion $g(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ gegeben. Bestimmen Sie die Potenzreihe von g im Entwicklungspunkt 0 und ermitteln Sie deren Konvergenzradius.
Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Funktion $z \mapsto \frac{1}{1+z}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Es sei die Differentialgleichung $(1 - x^2)y''(x) + 2y(x) = 0$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass bei einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ die Koeffizienten einer Rekursionsgleichung der Form $a_{j+2} = \frac{j+p}{j+q} a_j$ genügen. Bestimmen Sie p und q.
b) Zeigen Sie, dass $a_{2n} = 0$ für $n \geq 2$.
c) Bestimmen Sie explizit die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Aufgabe 6 (8 Punkte)
Gegeben sei das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos(x)}\,dx$.

a) Führen Sie das Integral mit Hilfe der Identität $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und der Substitution $z = e^{ix}$ in ein Integral über den komplexen Einheitskreis über.
b) Berechnen Sie damit den Wert des obigen Integrals mit Hilfe des Residuensatzes.