Universität Stuttgart

Dr. J. Brenner
Prof. Dr. K. Höllig
Prof. Dr. H. Walk

# Diplomvorprüfung Höhere Mathematik I–II

Herbst 1997
Klausur für Studierende der Fachrichtung Informatik
am 01. September 1997

**Bitte unbedingt beachten:**

- Verlangt und gewertet werden **alle** der folgenden 9 Aufgaben.
(Bearbeitungszeit: 180 Minuten).
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: 30 vom Kandidaten persönlich beschriebene Blätter zum Thema Höhere Mathematik I–II sowie 10 vom Kandidaten persönlich beschriebene Blätter zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung und Warteschlangen. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher und elektronische Rechengeräte.
- **Falls in der Aufgabe nicht anders verlangt, sind die Lösungswege anzugeben. Eine Angabe des Endergebnisses allein genügt nicht.**

**Hinweise für Wiederholer:**

- Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, daß zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis. Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 27.10.1997 durch Aushang in V57, 8. Stock, bekanntgegeben.
- Wiederholer, bei denen die Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird, müssen sich bis zum 3.11.1997 einen Termin für die mündliche Nachprüfung geben lassen. Eine individuelle schriftliche Einladung erfolgt nicht mehr. Sie sind verpflichtet, sich zu den angegebenen Terminen über das Ergebnis der schriftlichen Wiederholungsprüfung zu informieren und sich gegebenenfalls zu dem vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
- Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

## Aufgabe 1 (15 Punkte)

Geben Sie an (**Begründung ist nicht notwendig**), welche der folgenden Aussagen richtig sind:

a) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 2^j/j!$ konvergiert absolut.

b) $\det A = 0 \Rightarrow$ Das LGS $AX = B$ hat für kein $B$ eine Lösung.

c) Die Menge $\{X :\ x_1^2 - 999x_1x_2 + x_2^2 = 99\}$ ist eine Hyperbel.

d) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \sqrt{x+t}\,dt = \sqrt{2x}$

e) $\exp(2x_1 + 3x_2^2)$ hat keine lokalen Minima.

## Aufgabe 2 **(20 Punkte)**

Bestimmen Sie (**Angabe des Ergebnisses genügt**) für den Punkt $P = [1,1,1]^t$, die Gerade $\mathcal{G}: \ [1,1,0]^t + t \cdot [0,1,1]^t$ und die Ebene $\mathcal{E}: \ x_1 + x_2 + x_3 = 0$

a) den Abstand von $P$ zu $\mathcal{E}$.

b) den Schnittpunkt von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{E}$.

c) die Ebene durch $P$ parallel zu $\mathcal{E}$.

d) die Ebene durch $P$ und $\mathcal{G}$.

## Aufgabe 3 **(15 Punkte)**

Für welche $B$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= b_1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= b_2 \\ 2x_1 - x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

eine Lösung ? Wie lautet die allgemeine Lösung des transponierten Systems

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= b_2 \end{aligned} \qquad ?$$

## Aufgabe 4 **(15 Punkte)**

Berechnen sie:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

## Aufgabe 5 **(15 Punkte)**

Bestimmen Sie das Minimum der Funktion

$$f(x,y,z) = 3y + 4z$$

auf der Schnittkurve des Zylinders $\mathcal{Z}: x^2 + y^2 = 1$ und der Ebene $\mathcal{E}: x + z = 0$.

## Aufgabe 6 **(20 Punkte)**

Bestimmen Sie die periodische Lösung der Differentialgleichung

$$x'' + x' + x = \cos(\omega t) \quad ,$$

sowie für $\omega = 1$ die Lösung zu den Anfangswerten $x(0) = x'(0) = 0$.

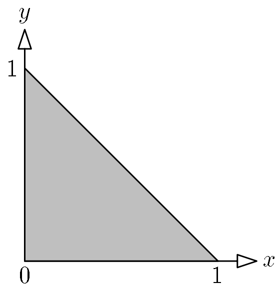
## Aufgabe 7 (10 Punkte)

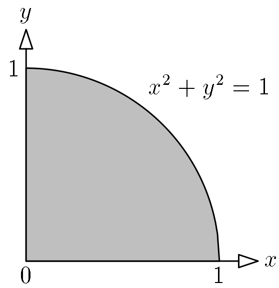
Bestimmen Sie Hauptachsen und Typ des Kegelschnitts

$$Q: \qquad x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 1 \quad .$$

## Aufgabe 8 (20 Punkte)

Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = xy$ über die abgebildeten Mengen.




## Aufgabe 9 (Wahrscheinlichkeitsr. und Warteschlangen) (35 Punkte)

Ein Kunde $K$ betritt eine Schalterhalle mit zwei Schaltern. An jedem der Schalter wird gerade ein Kunde bedient. Sobald einer der beiden Schalter frei wird, erfolgt die Bedienung von $K$ an diesem Schalter. Bekannt sei, daß die (zufälligen) Bedienzeiten, auch die restliche Bedienzeit des gerade bedient werdenden Kunden, am 1. Schalter $\exp(\lambda)$-verteilt und am 2. Schalter $\exp(\mu)$-verteilt sind ($0 < \lambda < \infty,\ 0 < \mu < \infty$) und daß alle Bedienzeiten voneinander unabhängig sind.

a) Man ermittle die Verteilungsfunktion der Wartezeit $W$ von $K$ bis zum Beginn seiner Bedienung und gebe den zugehörigen Erwartungswert an.
Hinweise: Man ermittle die Wahrscheinlichkeit, daß das Minimum der beiden restlichen Bedienzeiten $X$ und $Y$ größer als $t$ ist ($0 \le t < \infty$); das Ereignis, daß beide Schalter gleichzeitig frei werden, tritt nur mit Wahrscheinlichkeit 0 auf und kann vernachlässigt werden.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß $K$ am 2. Schalter bedient wird? Welches unmittelbar einleuchtende Ergebnis erhält man im Spezialfall $\lambda = \mu$?

c) Man ermittle für festes $x \in [0, \infty)$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Bedienzeit $Z$ von $K$ höchstens $x$ ist, und damit die Verteilungsfunktion dieser Bedienzeit.

d) Man gebe im Spezialfall $\lambda = \mu$ unter Verwendung der nicht auszuwertenden Verteilungsfunktion $\Phi$ der standardisierten Normalverteilung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit an, daß $K$ bei 400 unabhängigen Konstellationen der eingangs beschriebenen Art höchstens 180mal am 2. Schalter bedient wird.