Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur für alle gemeldeten Fachrichtungen außer Immobilientechnik und Immobilienwirtschaft

am 19.02.2009, 09.00–11.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten und des Betrages z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 15 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File "allginfo.pdf" im Verzeichnis "`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_WS0708/`".

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Ein Betrieb stellt auf vier Anlagen A, B, C, D zwei Produkte P, R her, wobei jedes der beiden Produkte alle vier Anlagen durchlaufen muss, aber die Produktionsreihenfolge beliebig ist. Die Bearbeitungszeiten pro kg sind:

Anlage	Bearbeitungszeit in Stunden für Produkt	
	P	R
A	9	7
B	8	8
C	7.5	10
D	7	15

Wöchentlich kann Anlage A höchstens 63 Stunden, Anlage B höchstens 64 Stunden, Anlage C höchstens 75 Stunden und Anlage D höchstens 105 Stunden benutzt werden. Der Gewinn pro kg beträgt bei P 50 Euro und bei R 100 Euro. Wieviel kg von P und wieviel kg von R müssen hergestellt werden, um einen möglichst großen Gesamtgewinn zu erzielen? Es genügt eine graphisch ermittelte Lösung im Rahmen der verfügbaren Zeichen– und Ablesegenauigkeit.

Hinweise: i) Für die graphische Lösung dieses Aufgabenteils steht Ihnen ein Millimeterpapierblatt zur Verfügung (Es kann aber auch anderes z.B. kariertes Papier benutzt werden). Bei Bedarf kann ein zweites zur Verfügung gestellt werden.
ii) Als "Mustergerade" für die Geraden konstanten Gesamtgewinns ist die Gerade für den Gesamtgewinn von 500 Euro günstig.

Aufgabe 2 **14 Punkte**

a) Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{16n^4 - 10n^2 + n}{-8n^3 + 10n^2 + 2n}, \quad b_n := \sqrt{6n^6 + n^3} - \sqrt{6n^6 + n^4 - n^2}.$$

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x\to x_1+} f(x), \quad \lim_{x\to x_1-} f(x), \quad \lim_{x\to x_1} f(x), \quad \lim_{x\to x_2+} f(x), \quad \lim_{x\to x_2-} f(x) \text{ und } \lim_{x\to x_2} f(x)$$

$$\text{mit } f(x) := \frac{x^3 + 3x^2 - 12x - 18}{x^2 - 2x - 3},$$

wobei x_1 und x_2 die Nullstellen des Nenners von $f(x)$ sind.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **8 Punkte**

a) Bei einem Ratensparvertrag wird ein nomineller Jahreszinssatz von 4% vereinbart.

i) Es werden vom 1. Januar 2008 bis zum 1. Juli 2012 am 1. Januar und 1. Juli jeden Jahres jeweils 500 Euro eingezahlt. Über welchen Betrag kann am 31.12.2012 verfügt werden, wenn die Zinsen am Ende jeden Halbjahres gutgeschrieben werden?

ii) Statt der halbjährlichen Einzahlung und Zinsgutschrift soll am Anfang jeden Jahres ein fester Betrag E vom 1. Januar 2008 bis zum 1. Januar 2012 bei jährlicher Zinsgutschrift eingezahlt werden. Wie groß muss E sein, damit am 31.12.2012 über einen Betrag von 9000 Euro verfügt werden kann?

b) Eine Bakterienpopulation wächst in einer Stunde um 4%. Nach welcher Zeit hat sie sich verdoppelt?

Aufgabe 4 **3 Punkte**

Ein Kredit in Höhe von 50 000 Euro soll mit festen monatlichen Beträgen A zurückgezahlt werden, und zwar jeweils am Ende des Monats. Der nominelle Jahreszinssatz betrage 12%, die Zinsgut- oder lastschrift erfolgt ebenfalls monatlich. Wie groß muss A sein, damit der Kredit nach 20 Jahren vollständig abgezahlt ist?

Aufgabe 5 **4 Punkte**

In eine Anlage, die zwei Jahre lang betrieben wird, werden 50 000 Euro am Anfang des ersten Jahres investiert. Im ersten Betriebsjahr wird ein Einzahlungsüberschuss in Höhe von 60 000 Euro erzielt, im zweiten ein Einzahlungsüberschuss in Höhe von 10 000 Euro, die jeweils am Jahresende dem Betrieb zufließen. Wie hoch ist der interne Zinssatz (d.h. der Zinsatz unter dem ein Kreditszinssatz unbedingt bleiben muss)?
Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $\sqrt{56}/2 = \sqrt{14} = 3.74$, $1/0.74 = 1.35$.

Aufgabe 6 **12 Punkte**

Ein Monopol sieht sich einer Nachfrage $N(p) = 16 \cdot p^{-4}$, $p > 0$, gegenüber, auf die es seine Produktion genau einstellen will, d.h. die produzierte Menge ist $q = N(p)$. Die Kostenfunktion sei

$$K(q) := \begin{cases} 3 + \frac{3}{4} q \text{ für } 0 \leq q \leq 12\,, \\ \\ 13 + \frac{1}{2} q \text{ für } 12 < q \leq 82\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $p = N^{-1}(q)$ der Funktion $q = N(p)$, und prüfen Sie, ob es einen Preis p gibt, für den der Gewinn $(p \cdot q - K)$ maximal wird, und bestimmen Sie gegebenenfalls diesen Preis.
Hinweis: Untersuchen Sie zuerst $g(q)$, also den Gewinn als Funktion von q.
Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $2 \cdot 12^{3/4} = 12.89$, $2 \cdot 81^{3/4} = 54.00$, $2 \cdot 82^{3/4} = 54.50$.

Aufgabe 7 **8 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Beträge der Vektoren

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und den Winkel zwischen ihnen. Bestimmen Sie außerdem einen Vektor **c**, der zu **a** und **b** orthogonal ist und das Volumen des von den drei Vektoren **a**, **b**, **c** aufgespannten Spats.

b) Es sei $\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$ eine Basis eines zweidimensionalen Vektorraumes und $\overrightarrow{x} = -2\overrightarrow{b}_1 + 5\overrightarrow{b}_2$ ein Vektor aus diesem Raum.

Stellen Sie ist diesen Vektor als Linearkombination von zwei anderen Basisvektoren $\overrightarrow{c}_1$, $\overrightarrow{c}_2$ dar, die mit den erstgenannten über die Beziehung
$\overrightarrow{b}_1 = 2\overrightarrow{c}_1 - 2\overrightarrow{c}_2$,
$\overrightarrow{b}_2 = 2\overrightarrow{c}_1 + 3\overrightarrow{c}_2$,
zusammenhängen.

Aufgabe 8 **12 Punkte**

a) Bestimmen Sie den (endlichen und positiven) Flächeninhalt zwischen den Kurven zu $f(x) := x^3 - x^2$ und $g(x) := 9x - 9$.

b) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^{\pi/2} (x+1) \cdot \sin x \;\, \mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^1 4x^3 \cdot \exp(x^4) \;\, \mathrm{d}x\,, \quad \exp(u) := e^u.$$