Prof. Dr. C. Rohde
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtung
bau, fmt, iui, mach, tema, umw

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter, dokumentenechter Stift (nicht in den Farben Rot oder Grün).
- Bei den **Aufgaben 1-5** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Bei **Aufgabe 6** wird nur das Ergebnis gewertet. Lösungswege werden nicht berücksichtigt. Diese Aufgabe ist direkt auf dem Aufgabenblatt zu bearbeiten. Tragen Sie deshalb Name und Matrikelnummer in die dafür vorgesehenen Kästchen auf dem Aufgabenblatt ein.
- In dieser Klausur können bis zu **58 Punkte** erreicht werden.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name: | **Matrikel–Nr.:**

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Es seien die Kurve $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, y > 0\}$ und das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad v(x, y) = (1, y)$$

gegeben. Berechnen Sie

$$\int_K v \, \mathrm{d}s.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte):

Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) + 3y'''(x) + 2y''(x) &= e^{-x}, \quad x \in (0, 1), \\ y(0) &= 0, \\ y''(0) &= -2, \\ y'''(0) &= 3, \\ y'(1) &= 1. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (12 Punkte):

Es sei

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, y > 0\}$$

und

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, x, z^3).$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_\Sigma f \cdot n \, \mathrm{d}\sigma,$$

n bezeichne dabei den Normalenvektor mit positiver y-Komponente.

Aufgabe 4 (12 Punkte):

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 1 - (x - 2j)^2$ für $x \in [2j - 1, 2j + 1)$, $j \in \mathbb{Z}$.
Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten von f.

Aufgabe 5 (13 Punkte):

a) Bestimmen Sie die Lösung $z(t)$ des folgenden Anfangswertproblems:

$$z'(t) = -\frac{z^2 + z - 2}{(2z+1)t}, \quad t \geq 1, \qquad z(1) = 2.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ des folgenden Anfangswertproblems mit Hilfe von a) und einer geeigneten Substitution:

$$y'(t) = \frac{\left(\frac{y^2}{t^2} + 2\right)}{\left(2\frac{y}{t} + 1\right)}, \quad t \geq 1, \qquad y(1) = 2.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Geben Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind:

		wahr	**falsch**
i)	Seien y_1, y_2, y_3 Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $$y'(t) = Ay(t),$$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt: Die Funktionenmenge $\{y_1, y_2, y_3\}$ ist linear abhängig.	☐	☐
ii)	Betrachten Sie die skalare Differentialgleichung $$x'(t) = f(x(t)). \qquad (1)$$ Dann gilt: Ist f auf ganz $\mathbb{R}$ einmal differenzierbar, so existiert die Lösung von (1) für alle $t \in \mathbb{R}$.	☐	☐
iii)	Sind y_1, y_2 Lösungen von $y'(t) = Ay(t) + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ist auch $y_1 + y_2$ eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.	☐	☐
iv)	Die 2π-periodische Funktion f stimme auf $\mathbb{R}$ mit ihrer Fourierreihe $$f(x) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin(kx)$$ überein. Dann gilt: f ist eine ungerade Funktion.	☐	☐

Bemerkung:

Bei dieser Aufgabe ist **keine** Begründung Ihrer Antwort verlangt.
Jede **richtige** Antwort wird mit 1 **Punkt** bewertet, jede **falsche** Antwort mit -1 **Punkt**.
Nichtbeantwortete Fragen werden mit 0 **Punkten** bewertet.
Die Aufgabe kann insgesamt nicht mit weniger als 0 Punkten gewertet werden.