

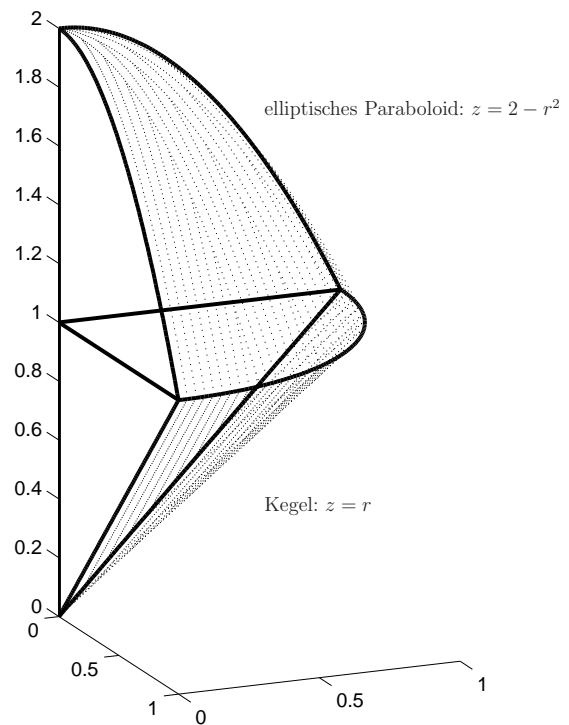
Aufgabe 1 (12 Punkte) Berechnen Sie das Volumen und den Schwerpunkt des Körpers

$$K: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq z^2, \quad x^2 + y^2 + z \leq 2.$$

In Zylinderkoordinaten haben die Gleichungen die Form

$$\begin{aligned} r \cos \varphi \geq 0 &\Rightarrow \varphi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ r \sin \varphi \geq 0 &\Rightarrow \varphi \in [0, \pi], \\ z \geq 0, r^2 \leq z^2 &\Rightarrow 0 \leq r \leq z, \\ r^2 + z \leq 2 &\Rightarrow z \leq 2 - r^2. \end{aligned}$$

Aus der dritten und vierten Gleichung folgt $r \leq 2 - r^2 \Rightarrow r \leq 1$ also ist das Volumenintegral in Zylinderkoordinaten



$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r^2} r dz dr d\varphi &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (2 - r^2 - r) r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left[r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi(1 - 1/4 - 1/3)}{2} = \frac{5\pi}{24}. \end{aligned}$$

Für die z -Koordinate des Schwerpunkts ist

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r^2} z r dz dr d\varphi &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{(2-r^2)^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (4 - 4r^2 + r^4 - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi}{4} \left[2r^2 - \frac{5r^4}{4} + \frac{r^6}{6} \right]_0^1 = \frac{\pi(2 - 5/4 + 1/6)}{4} = \frac{11\pi}{48}, \end{aligned}$$

also $s_z = 11/10$.

Für die x -Koordinate des Schwerpunkts ist

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos \varphi \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r^2} r^2 dz dr d\varphi = \int_0^1 (2 - r^2 - r) r^2 dr = \left[\frac{2r^3}{3} - \frac{r^5}{5} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{13}{60},$$

also $s_x = 26/(25\pi)$. Aus Symmetrie ist $s_y = s_x$.

Aufgabe 2 (11 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$$

sowie die spezielle Lösung, für die $y(0) = 4$ und $y(1) = 0$ gilt.

- b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 8 \sin(x).$$

- a) Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -3,$$

somit ergibt sich die allgemeine reelle Lösung zu

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} 4 &= y(0) = c_1 \\ 0 &= y(1) = c_1 e^{-3} + c_2 e^{-3} \end{aligned}$$

folgt $c_1 = 4$, $c_2 = -4$. Somit ist die spezielle Lösung

$$y(x) = 4(1 - x)e^{-3x}.$$

- b) Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 - i, \quad \lambda_2 = 2 + i,$$

somit ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$y_h(x) = \hat{c}_1 e^{(2-i)x} + \hat{c}_2 e^{(2+i)x},$$

die allgemeine reelle Lösung lautet

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} \cos(x) + c_2 e^{2x} \sin(x).$$

Die rechte Seite ist von der Form $f(x) = \operatorname{Im}(p(x)e^{(0+i)x})$, wobei p ein Polynom vom Grade Null ist und $\lambda = i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Es liegt also keine Resonanz vor, der Ansatz für die partikuläre komplexe Lösung lautet:

$$y_p(x) = a e^{ix}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt mit Hilfe der Operatorenmethode:

$$(D - (2 - i)E)(D - (2 + i)E)ae^{ix} = 8e^{ix}$$

$$e^{ix}(D - (2 - 2i)E)(D - 2E)a = 8e^{ix}$$

$$(D - (2 - 2i)E)(-2a) = 8$$

$$a(1 - i) = 2$$

also $a = 1 + i$ und somit die allgemeine komplexe Lösung zur rechten Seite $3e^{ix}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \hat{c}_1 e^{(2-i)x} + \hat{c}_2 e^{(2+i)x} + (1+i)e^{ix}.$$

Die allgemeine reelle Lösung zur rechten Seite $8 \sin(x) = \text{Im}(8e^{ix})$ lautet demnach

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos(x) + c_2 e^{2x} \sin(x) + \cos(x) + \sin(x).$$

Aufgabe 3 (8 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2xy(x)e^{x^2} + (3 + y(x))e^{x^2}y'(x) = 0.$$

- Zeigen Sie, dass die gegebene Differentialgleichung nicht exakt ist.
- Bestimmen Sie einen nur von y abhängenden integrierenden Faktor λ für die gegebene Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die implizite Form der allgemeinen reellen Lösung der Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die implizite Form der speziellen Lösung, welche $y(0) = 1$ erfüllt.

a) Aus

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2xye^{x^2} &\Rightarrow f_y(x, y) &= 2xe^{x^2} \\ g(x, y) &= (3 + y)e^{x^2} &\Rightarrow g_x(x, y) &= 2x(3 + y)e^{x^2} \end{aligned}$$

folgt

$$f_y(x, y) - g_x(x, y) = 2x(2 + y)e^{x^2} \neq 0,$$

die Differentialgleichung ist also nicht exakt.

b) Für den integrierenden Faktor muss gelten

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{g_x(x, y) - f_y(x, y)}{f(x, y)} = \frac{2x(2 + y)e^{x^2}}{2xye^{x^2}} = \frac{2 + y}{y} = \frac{2}{y} + 1,$$

also

$$\lambda'(y) = \left(\frac{2}{y} + 1\right) \lambda(y) \quad \Rightarrow \quad \lambda(y) = e^{2\ln(y)+y} = y^2 e^y.$$

c) Das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \lambda(y)f(x, y) \\ \lambda(y)g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^3e^{x^2+y} \\ (3y^2 + y^3)e^{x^2+y} \end{pmatrix}$$

besitzt nach obigen Überlegungen ein Potential, welches sich zu

$$\Phi(x, y) = y^3 e^{x^2+y}$$

berechnen lässt. Die allgemeine reelle Lösung hat die Form $\Phi(x, y) = c$, also

$$y^3(x)e^{x^2+y(x)} = c \quad c \in \mathbb{R}.$$

d) Einsetzen in die allgemeine Lösung liefert die spezielle Lösung.

$$1^3 e^1 = e = c \quad \Rightarrow \quad y^3(x)e^{x^2+y(x)} = e$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Gegeben sind die Funktionen

$$f_1(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad f_2(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte und die Fouriertransformierte der Funktion f_1 .
- b) Ermitteln Sie die Fouriertransformierte der Funktion f_2 , indem Sie die Fouriertransformierte von f_1 verwenden.
- c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$g(x) := f_1(x) - f_2(x),$$

indem Sie die Fouriertransformierten von f_1 und f_2 verwenden.

- d) Ermitteln Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$h(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{für } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

indem Sie die Fouriertransformierte von g verwenden.

- a) Laplacetransformierte:

$$\mathcal{L}(f_1)(s) = \int_0^{\infty} f_1(x) e^{-sx} dx = \int_0^1 e^{-sx} dx = \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \right]_0^1 = \frac{-e^{-s} + 1}{s}$$

Da $f(x) = 0$ für $x < 0$, kann die Fouriertransformierte aus der Laplacetransformierten berechnet werden:

$$\widehat{f}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(f_1)(i\xi) = -\frac{i(-e^{-i\xi} + 1)}{\xi\sqrt{2\pi}}$$

- b) Aus $f_2(x) = f_1(x - 1)$ folgt die Fouriertransformierte:

$$\widehat{f}_2(\xi) = e^{-i\xi} \widehat{f}_1(\xi) = \frac{ie^{-i\xi}(e^{-i\xi} - 1)}{\xi\sqrt{2\pi}}$$

- c) Die Linearität der Fouriertransformation ergibt

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi) - \widehat{f}_2(\xi) = \frac{i(-e^{-2i\xi} + 2e^{-i\xi} - 1)}{\xi\sqrt{2\pi}} = -\frac{i(e^{-i\xi} - 1)^2}{\xi\sqrt{2\pi}}.$$

d) Die Funktion g ist die Ableitung der Funktion h

$$h'(x) = g(x).$$

Mit dem Zusammenhang

$$\widehat{h}'(\xi) = i\xi\widehat{h}(\xi)$$

lautet die Fouriertransformierte somit

$$\widehat{h}(\xi) = -\frac{i}{\xi}\widehat{h}'(\xi) = -\frac{i}{\xi}\widehat{g}(\xi) = -\frac{(e^{-i\xi} - 1)^2}{\xi^2\sqrt{2\pi}}.$$

Aufgabe 5 (11 Punkte) Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}\partial_{tt} u(t, x) &= 2\partial_{xx} u(t, x) + 6u(t, x), & x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0, \\ u(0, x) &= 0, \quad \partial_t u(0, x) = 8 \sin(x).\end{aligned}$$

Ansatz: $u(t, x) = v(t)w(x)$

In homogene Differentialgleichung: $v''w = 2vw'' + 6vw \Rightarrow \frac{v''}{v} = \frac{2w''}{w} + 6 = c$.

Zweite Gleichung und Nullrandbedingungen:

$$2w'' = (c - 6)w \Rightarrow w_n(x) = \sin(nx), \quad c_n = 6 - 2n^2, \quad n \geq 1$$

Erste Gleichung für c_n : $v'' + (2n^2 - 6)v = 0$

Lösungen:

$$\begin{aligned}n = 1: & \quad v_1(t) = a_1 e^{2t} + b_1 e^{-2t} \\ n > 1: & \quad v_n(t) = a_n \cos(\sqrt{2n^2 - 6}t) + b_n \sin(\sqrt{2n^2 - 6}t)\end{aligned}$$

Superposition:

$$u(t, x) = (a_1 e^{2t} + b_1 e^{-2t}) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n \cos(\sqrt{2n^2 - 6}t) + b_n \sin(\sqrt{2n^2 - 6}t) \right) \sin(nx)$$

Anfangsbedingung $u(0, x) = 0$:

$$u(0, x) = (a_1 + b_1) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a_1 = -b_1, a_n = 0, n > 1,$$

Anfangsbedingung $u_t(0, x) = 8 \sin(x)$:

$$u_t(0, x) = 2(a_1 - b_1) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sqrt{2n^2 - 6} \sin(nx) \stackrel{!}{=} 8 \sin(x) \Rightarrow a_1 = -b_1 = 2, b_n = 0, n > 1.$$

Lösung insgesamt

$$u(t, x) = 2(e^{2t} - e^{-2t}) \sin(x).$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Wir betrachten folgendes Glücksspiel: In einer Urne liegen 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Der Spieler bekommt für jede gezogene schwarze Kugel 1 Euro und muss für jede gezogene weiße Kugel 2 Euro bezahlen.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert des Gewinns.
- b) Wie muss man den vom Spieler für eine weiße Kugel zu zahlenden Betrag anpassen, damit der Erwartungswert des Gewinns gleich 0 ist?

Sei X die Anzahl der schwarzen Kugeln und $Y = X - 2(2 - X)$ der Gewinn. Mit der hypergeometrischen Verteilung folgt:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

Weiter gilt

$$P(Y = -4) = P(X = 0) = \frac{1}{10}$$

$$P(Y = -1) = P(X = 1) = \frac{6}{10}$$

$$P(Y = 2) = P(X = 2) = \frac{3}{10}$$

Der Erwartungswert von Y ist

$$E(Y) = -\frac{4}{10} - \frac{3}{5} + \frac{6}{10} = -\frac{4}{10}.$$

Zu b) Sei z der pro weißer Kugel zu zahlende Betrag und $Z = X - z(2 - X)$ der für diesen Betrag

resultierende Gewinn. Dann folgt:

$$\begin{aligned}P(Z = -2z) &= P(X = 0) = \frac{1}{10} \\P(Z = 1 - z) &= P(X = 1) = \frac{6}{10} \\P(Z = 2) &= P(X = 2) = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

und

$$E(Z) = -\frac{2z}{10} + \frac{6(1-z)}{10} + \frac{6}{10} = \frac{12-8z}{10}$$

Es gilt also

$$E(Z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}$$