Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 240 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 14** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 19. 10. 2009 über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **19. 10.** bis **28. 10. 2009** mit Frau Dr. Iryna Rybak (Raum V 57.7.163) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |(1+i)z| \leqq 4\sqrt{2} \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leqq \frac{1}{2},\ z \neq 0 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - z + \frac{1}{4} - i = 0$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (*8 Punkte*) Gegeben sind der Punkt $P = (-2, -1)$, das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left\{ P; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ sowie die affine Abbildung α in Koordinaten bezüglich $\mathbb{E}$:

$${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$. Geben Sie die Koordinatenbeschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α in Koordinaten bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)

(a) Berechnen Sie alle reellen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$f_1 = (-1,\, 0,\, 1)^{\mathsf{T}}, \qquad f_2 = (3,\, c,\, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad f_3 = (-2,\, 1,\, c)^{\mathsf{T}}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3+1}{x^3+2} \cos(x)$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \cos(x)}{\sin(x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \sin(x)}{e^{2x} - 3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x \ln(x) - 10}$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

(b) Gegeben ist die Quadrik $Q_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_3 = 0 \right\}$. In welche Darstellung wird Q_2 überführt, wenn die Transformation

$$x = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} y$$

auf sie angewandt wird?

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto (y^2 - 1)(x - y - 1)\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge der Funktion f. Markieren Sie das Vorzeichen der Funktionswerte in allen Bereichen.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f. Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und markieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(c) An welchen dieser kritischen Stellen liegen Extrema, wo Sattelpunkte vor?

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/v \\ -u/v^2 \end{pmatrix}$$

und die Kurve K, die parametrisiert wird durch

$$C\colon \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,.$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A. $\operatorname{Sp} A =$ det $A =$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. $\chi_A(\lambda) =$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 =$

(d) Bestimmen Sie die Menge M *aller* Eigenwerte von A. $M =$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Welche Gestalt hat die Quadrik Q?

Aufgabe 11 (*5 Punkte*) In Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist folgender Funktionsgrenzwert gegeben:

$$G_\alpha := \lim_{x\to 0+0} x^\alpha \sin x.$$

Berechnen Sie G_α für $\alpha = -1$ und $\alpha = 1$:

$G_{-1} =$ $G_1 =$

Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert G_α existiert:

Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert G_α nicht existiert:

Aufgabe 12 (*4 Punkte*) Bestimmmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen. Falls die untersuchte Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n\, n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{4^n}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n(n+1)}$

Aufgabe 13 (*10 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}\,t = \boxed{} \qquad \int \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{} \qquad \int x^2 \ln(y)\,\mathrm{d}\,y = \boxed{}$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{e^x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 14 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto e^{x+y} - \sin(xy)$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big)$ der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (0,0)$.

$$T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big) = \boxed{}$$