Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer, autip, geod, mawi, wewi**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In allen Aufgaben sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 14. 04. 2010 über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich vom 26. 04. bis zum 30. 04. 2010 bei Prof. Harbrecht (Zimmer AR 5b, 0.40; `harbrecht@ians.uni-stuttgart.de`) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*13 Punkte*)

Gegeben sei die Fläche S mit

$$S = \Big\{(x,y,z) = \Phi(u,v) = \Big(u, v, uv(1-u-v)\Big),\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1-u\Big\}.$$

a) Skizzieren Sie die Randkurve ∂S von S. Geben Sie eine Parametrisierung der einzelnen Teilstücke von ∂S an.

b) Geben Sie einen Vektor $\hat{n}(u,v)$ an, der senkrecht auf der Fläche S steht.

c) Berechnen Sie

$$\int_S \operatorname{rot} G(x,y,z) \cdot n(x,y,z) ds_{(x,y,z)}$$

für das Vektorfeld

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz - \frac{1}{2}y^2 \\ xz - xy^2 \\ xy + y \end{pmatrix},$$

wobei $n(x,y,z)$ den nach oben gerichteten normierten Normalenvektor der Fläche S bezeichnet.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

a) Transformieren Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'''(x) - 5y''(x) + 2y(x) = 3x$$

auf ein System erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 4xe^{2x} + 16\sin(2x).$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y(x)e^{2xy(x)} + x + bxe^{2xy(x)}\, y'(x) = 0\,.$$

Finden Sie den Wert von $b \in \mathbb{R}$, so dass die Differentialgleichung exakt ist. Bestimmen Sie für dieses b die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie die Lösung mit $y(1) = 0$.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Die 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ x, & \text{für } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

b) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Fourier-Reihe gegen $f(x)$? Gegen welche Werte konvergiert die Reihe für $x = 0$ und $x = 1$?

c) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

durch Auswerten der Fourierreihe von f an einer geeigneten Stelle.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$e^{\frac{1}{y}} \partial_x u(x,y) + y^2 \partial_y u(x,y) + 2u(x,y) = 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},\ y \in (0,\infty) \tag{1}$$

mit den Anfangswerten $u\left(0, \frac{1}{t}\right) = e^{2t}$ für $t \in (0,\infty)$.

a) Bestimmen Sie die gewöhnlichen Differentialgleichungen, durch die die Charakteristiken beschrieben werden, und lösen Sie diese.

b) Geben Sie die Charakteristik durch den Punkt $\left(0, \frac{1}{t_0}\right)$ an.

c) Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung und die zugehörige Anfangsbedingung, die die Lösung der partiellen Differentialgleichung (1) auf der Charakteristik aus b) erfüllt.

d) Geben Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangswerten an.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

Bei der Herstellung von Glühbirnen werden diese in zwei Qualitätsklassen eingeteilt. Die beiden Qualitätsklassen unterscheiden sich dadurch, dass die Wahrscheinlichkeit für die Lebensdauer einer Glühbirne von mehr als 1000 Stunden gleich

0,80 für die Qualitätsklasse I,
0,20 für die Qualitätsklasse II

beträgt. Von der Gesamtproduktion sei jede vierte Glühbirne aus der Qualitätsklasse I.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Glühbirne länger als 1000 Stunden brennt?

b) Eine Glühbirne ist innerhalb von 1000 Stunden durchgebrannt. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Glühbirne der Qualitätsklasse I angehört?

c) Die (in Stunden gemessene) Lebensdauer einer Glühbirne der Klasse I sei exponentialverteilt mit Parameter λ. Berechnen Sie λ.
