Aufgabe 1 (*13 Punkte*)

Gegeben sei die Fläche S mit

$$S = \Big\{(x,y,z) = \Phi(u,v) = \Big(u, v, uv(1-u-v)\Big),\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1-u\Big\}.$$

a) Skizzieren Sie die Randkurve ∂S von S. Geben Sie eine Parametrisierung der einzelnen Teilstücke von ∂S an.

b) Geben Sie einen Vektor $\hat{n}(u,v)$ an, der senkrecht auf der Fläche S steht.

c) Berechnen Sie

$$\int_S \operatorname{rot} G(x,y,z) \cdot n(x,y,z) ds_{(x,y,z)}$$

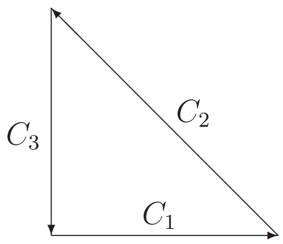
für das Vektorfeld

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz - \frac{1}{2}y^2 \\ xz - xy^2 \\ xy + y \end{pmatrix},$$

wobei $n(x,y,z)$ den nach oben gerichteten normierten Normalenvektor der Fläche S bezeichnet.

---

a) Die Randkurve von S ist das Dreieck in der xy-Ebene mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$:



Die Teilstücke der Randkurve lassen sich parametrisieren durch

$$C_1 = \left\{(t,0,0)^T : t \in [0,1]\right\},$$
$$C_2 = \left\{(1-t,t,0)^T : t \in [0,1]\right\},$$
$$C_3 = \left\{(0,1-t,0)^T : t \in [0,1]\right\}.$$

b) Der Normalenvektor ergibt sich als das Kreuzprodukt der beiden Tangentialvektoren

$$T_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v - 2uv - v^2 \end{pmatrix}, \quad T_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u - 2uv - u^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{n}(u,v) = T_u \times T_v = \begin{pmatrix} v^2 + 2uv - v \\ u^2 + 2uv - u \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) **Weg 1: direkt**

Die Rotation von G ist

$$\operatorname{rot} G(x,y,z) = \begin{pmatrix} (x+1)-x \\ y-y \\ (z-y^2)-(z-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y-y^2 \end{pmatrix}.$$

Mit b) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} G(x,y,z)\cdot n(x,y,z) ds_{(x,y,z)} &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v-v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^2+2uv-v \\ u^2+2uv-u \\ 1 \end{pmatrix} dv\, du \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} \left(v^2+2uv-v+v-v^2\right) dv\, du \\
&= \int_0^1 \left[uv^2\right]_0^{1-u} du = \int_0^1 \left(u-2u^2+u^3\right) du \\
&= \left[\frac{1}{2}u^2 - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Weg 2: mit Satz von Stokes

Mit dem Satz von Stokes und den Parametrisierungen aus a) erhalten wir

$$\int_S \operatorname{rot} G(x,y,z)\cdot n(x,y,z) ds_{(x,y,z)} = \sum_{k=1}^{3} \int_0^1 G(C_k(t))\cdot C_k'(t)\, dt.$$

Die einzelnen Kurvenintegrale ergeben

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G(C_1(t))\cdot C_1'(t)\, dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0, \\
\int_0^1 G(C_2(t))\cdot C_2'(t)\, dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 \\ -(1-t)t^2 \\ (1-t)t+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}t^2 + t^3\right) dt = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \\
\int_0^1 G(C_3(t))\cdot C_3'(t)\, dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-t)^2 \\ 0 \\ (1-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_S \operatorname{rot} G(x,y,z)\cdot n(x,y,z) ds_{(x,y,z)} = 0 + \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12}.$$

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

a) Transformieren Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'''(x) - 5y''(x) + 2y(x) = 3x$$

auf ein System erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 4xe^{2x} + 16\sin(2x).$$

---

a) Mit $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y'(x)$, $u_3(x) = y''(x)$ ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x \end{pmatrix}$$

b) Wir berechnen zunächst die Lösung der homogenen Gleichung. Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_{1,2} = 2$.
Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\left\{e^{2x}, xe^{2x}\right\}$$

und die homogene Lösung

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die Berechnung der partikulären Lösung nutzen wir das Superpositionsprinzip:

- $4xe^{2x}$: Resonanzfall, daher Ansatz für die partikuläre Lösung

  $$y_{p1}(x) = (b_1 x + b_2)x^2 e^{2x}.$$

  Die Operatorenmethode ergibt

  $$\begin{aligned} (D - 2E)^2(b_1 x + b_2)x^2 e^{2x} &= 4xe^{2x} \\ e^{2x} D^2(b_1 x + b_2)x^2 &= 4xe^{2x} \\ D^2(b_1 x^3 + b_2 x^2) = 6b_1 x + 2b_2 &= 4x. \end{aligned}$$

  Koeffizientenvergleich liefert $6b_1 = 4$, $b_2 = 0$ und damit die partikuläre Lösung

  $$y_{p1}(x) = \frac{2}{3}x^3 e^{2x}.$$

- $16\sin(2x) = 16\,\mathrm{Im}\,(e^{2ix})$: Keine Resonanz; wir machen den komplexen Ansatz:

  $$\hat{y}_{p2}(x) = ce^{2ix}.$$

  Die Operatorenmethode führt auf

  $$\begin{aligned} (D-2E)^2 ce^{2ix} &= 16e^{2ix} \\ e^{2ix}(D+2(i-1)E)^2 c &= 16e^{2ix} \\ (D^2+4(i-1)D-8iE)c &= 16 \\ -8ic &= 16 \quad \Rightarrow \quad c = 2i. \end{aligned}$$

  Damit erhalten wir die komplexe partikuläre Lösung

  $$\hat{y}_{p2}(x) = 2ie^{2ix} = 2i\Big(\cos(2x) + i\sin(2x)\Big)$$

  und die reelle

  $$y_{p2}(x) = \mathrm{Im}(\hat{y}_{p2}(x)) = 2\cos(2x).$$

Die gesamte Lösung ist also

$$y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{2}{3}x^3e^{2x} + 2\cos(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Alternative für y_{p2}: Reeller Ansatz

$$\begin{aligned} y_{p2}(x) &= a\sin(2x) + b\cos(2x) \\ y'_{p2}(x) &= 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x) \\ y''_{p2}(x) &= -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x). \end{aligned}$$

In die Dgl. eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x) - 8a\cos(2x) + 8b\sin(2x) + 4a\sin(2x) + 4b\cos(2x) &= 16\sin(2x) \\ (-4a+8b+4a)\sin(2x) + (-4b-8a+4b)\cos(2x) &= 16\sin(2x) \\ 8b\sin(2x) - 8a\cos(2x) &= 16\sin(2x). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $b = 2$, $a = 0$ und damit die partikuläre Lösung

$$y_{p2}(x) = 2\cos(2x).$$

Alternative Variation der Konstanten:

Der Ansatz $y_p(x) = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)xe^{2x}$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4xe^{2x} + 16\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Umformen liefert

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^2e^{2x} - 16x\sin(2x) \\ 4xe^{2x} + 16\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

und damit die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^2 - 16x\sin(2x)e^{-2x} \\ 4x + 16\sin(2x)e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Integration liefert

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}x^3 + 4x\left(\sin(2x) + \cos(2x)\right)e^{-2x} + 2\cos(2x)e^{-2x} \\ 2x^2 - 4\left(\sin(2x) + \cos(2x)\right)e^{-2x} \end{pmatrix}$$

und damit die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{4}{3}x^3e^{2x} + 4x\left(\sin(2x) + \cos(2x)\right) + 2\cos(2x) + 2x^3e^{2x} - 4x\left(\sin(2x) + \cos(2x)\right) \\ &= \frac{2}{3}x^3e^{2x} + 2\cos(2x). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y(x)e^{2xy(x)} + x + bxe^{2xy(x)}\, y'(x) = 0\,.$$

Finden Sie den Wert von $b \in \mathbb{R}$, so dass die Differentialgleichung exakt ist. Bestimmen Sie für dieses b die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie die Lösung mit $y(1) = 0$.

Mit

$$f(x,y) = ye^{2xy} + x\,, \qquad g(x,y) = bxe^{2xy}$$

gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2xy} + 2xye^{2xy}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = b\left(e^{2xy} + 2xye^{2xy}\right).$$

Damit die Differentialgleichung exakt ist, muss $b = 1$ sein.

Gesucht ist ein Potential $\Phi(x,y)$ mit $\operatorname{grad}\Phi(x,y) = (f(x,y),\, g(x,y))^T$. Wir berechnen zunächst

$$\Phi(x,y) = \int f(x,y)\; dx = \int \left(ye^{2xy} + x\right)\; dx = \frac{e^{2xy}}{2} + \frac{x^2}{2} + c(y).$$

Weiter folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{2xy}}{2} + \frac{x^2}{2} + c(y)\right) = xe^{2xy} + c'(y) \overset{!}{=} g(x,y) = xe^{2xy}$$
$$\Rightarrow c'(y) = 0$$
$$\Rightarrow \Phi(x,y) = \frac{1}{2}e^{2xy} + \frac{1}{2}x^2 = C$$

Nach y auflösen ergibt

$$y(x) = \frac{\ln(2C - x^2)}{2x}.$$

Mit dem Anfangswert $y(1) = 0$ folgt

$$\frac{1}{2}\ln(2C - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

und damit die Lösung

$$y(x) = \frac{\ln(2 - x^2)}{2x}.$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Die 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ x, & \text{für } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

b) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Fourier-Reihe gegen $f(x)$? Gegen welche Werte konvergiert die Reihe für $x = 0$ und $x = 1$?

c) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

durch Auswerten der Fourierreihe von f an einer geeigneten Stelle.

---

a) Die reelle Fourier-Reihe ist gegeben durch

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\right)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 1dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} xdx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0} \cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin(n\pi x)\right]_{-1}^{0} \\
&\quad + \frac{1}{n\pi}\left[x\sin(n\pi x)\right]_{0}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}\sin(n\pi x)dx \\
&= \frac{1}{(n\pi)^2}\left[\cos(n\pi x)\right]_{0}^{1} = \frac{1}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right] \\
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0} \sin(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi x)\right]_{-1}^{0} \\
&\quad - \frac{1}{n\pi}\left[x\cos(n\pi x)\right]_{0}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n + (-1)^n\right] = -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Die reelle Fourier-Reihe von f is folglich

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(n\pi x) - \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right).$$

b) Die Fourier-Reihe konvergiert an allen Stetigkeitsstellen gegen die Funktion f, also für

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2n | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Da f bei $x = 1$ stetig ist, konvergiert die Reihe gegen den Funktionswert $f(1) = 1$. Für $x = 0$ konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel des rechts- und linksseitigen Grenzwerts, d.h. gegen

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 0+} f(x)\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}.$$

c) Auswerten der Fourier-Reihe von f bei $x = 0$ (oder $x = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$) führt zu

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{1}{2},$$

d.h,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[1 - (-1)^n\right] = \frac{\pi^2}{4}.$$

Alternative: Auswertung an $x = 1$ (oder $x = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$) ergibt

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right](-1)^n = 1$$

und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[1 - (-1)^n\right] = \frac{\pi^2}{4}.$$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$e^{\frac{1}{y}}\partial_x u(x,y) + y^2 \partial_y u(x,y) + 2u(x,y) = 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},\ y \in (0,\infty) \tag{1}$$

mit den Anfangswerten $u\left(0, \frac{1}{t}\right) = e^{2t}$ für $t \in (0,\infty)$.

a) Bestimmen Sie die gewöhnlichen Differentialgleichungen, durch die die Charakteristiken beschrieben werden, und lösen Sie diese.

b) Geben Sie die Charakteristik durch den Punkt $\left(0, \frac{1}{t_0}\right)$ an.

c) Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung und die zugehörige Anfangsbedingung, die die Lösung der partiellen Differentialgleichung (1) auf der Charakteristik aus b) erfüllt.

d) Geben Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangswerten an.

---

a) Die gewöhnlichen Differentialgleichungen, durch die die Charakteristiken beschrieben werden, sind

$$\begin{aligned} x'(s) &= \exp\left(\frac{1}{y(s)}\right) \\ y'(s) &= y^2(s). \end{aligned}$$

Lösung der zweiten Gleichung:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 ds \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y(s)} = s + c_1 \quad \Longrightarrow \quad y(s) = -\frac{1}{s+c_1}$$

Lösung der ersten Gleichung:

$$x'(s) = \exp\left(\frac{1}{y(s)}\right) = e^{-(s+c_1)} \quad \Longrightarrow \quad x(s) = -e^{-(s+c_1)} + c_2$$

b) Es muss gelten

$$\begin{aligned} y(0) = -\frac{1}{c_1} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{t_0} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -t_0 \\ x(0) = -e^{-c_1} + c_2 = -e^{t_0} + c_2 &\stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = e^{t_0}. \end{aligned}$$

Die Charakteristik durch den Punkt $\left(0, \frac{1}{t_0}\right)$ ist damit

$$\begin{aligned} x(s) &= -e^{-(s-t_0)} + e^{t_0} = e^{t_0}(1 - e^{-s}) \\ y(s) &= -\frac{1}{s-t_0}. \end{aligned} \tag{2}$$

c) Gewöhnliche Differentialgleichung und die zugehörige Anfangsbedingung auf den Charakteristiken:

$$\tilde{u}'(s) = -2\tilde{u}(s), \quad \tilde{u}(0) = e^{2t_0}$$

Lösung ohne Anfangsbedingung:

$$\tilde{u}(s) = c_3 e^{-2s}$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $\tilde{u}(0) = c_3 = e^{2t_0}$, also

$$\tilde{u}(s) = e^{2(t_0 - s)}$$

d) Bestimmung von $t_0 - s$ in Abhängigkeit von x und y. Aus (2) folgt

$$t_0 - s = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \exp\left(\frac{2}{y}\right).$$

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

Bei der Herstellung von Glühbirnen werden diese in zwei Qualitätsklassen eingeteilt. Die beiden Qualitätsklassen unterscheiden sich dadurch, dass die Wahrscheinlichkeit für die Lebensdauer einer Glühbirne von mehr als 1000 Stunden gleich

0,80 für die Qualitätsklasse I,
0,20 für die Qualitätsklasse II

beträgt. Von der Gesamtproduktion sei jede vierte Glühbirne aus der Qualitätsklasse I.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Glühbirne länger als 1000 Stunden brennt?

b) Eine Glühbirne ist innerhalb von 1000 Stunden durchgebrannt. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Glühbirne der Qualitätsklasse I angehört?

c) Die (in Stunden gemessene) Lebensdauer einer Glühbirne der Klasse I sei exponentialverteilt mit Parameter λ. Berechnen Sie λ.

---

a)

$$B_i \mathrel{\widehat{=}} (\text{Qualitätsklasse i}) : \quad P(B_1) = \frac{1}{4}, \quad P(B_2) = \frac{3}{4}$$
$$A \mathrel{\widehat{=}} (\text{Lebensdauer} \geq 1000\text{h}) : \quad P(A|B_1) = \frac{4}{5} \quad P(A|B_2) = \frac{1}{5}$$

Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \underline{\frac{7}{20}}. \end{aligned}$$

b) Zu berechnen ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B_1|\overline{A})$. Mit der Bayes'schen Formel folgt

$$\begin{aligned} P(B_1|\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A}|B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{(1 - P(A|B_1))P(B_1)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{13}{20}} = \underline{\frac{1}{13}}. \end{aligned}$$

c) Sei X die Lebensdauer der Glühbirne in Stunden. Aus der Information

$$p(X > 1000) = 1 - p(X \leq 1000) = 0.8$$

erhalten wir mit der Verteilungsfunktion F_λ der Exponentialverteilung

$$\begin{aligned} & 0.8 = 1 - F_\lambda(1000) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \cdot 1000}\right) = e^{-1000\lambda} \\ \Rightarrow \quad & \lambda = -\frac{\ln(0.8)}{1000} = \frac{\ln(1.25)}{1000}. \end{aligned}$$