Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Teufel, Dr. N. Röhrl, J. Spreer

Mathematik inf / sotech / tpinf

Prüfungsklausur, 5. 3. 2010

Name: ______________________ Matrikelnr.: __________ Fachrichtung: __________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$	Note
Punkte										/60	

Aufgabe 1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k \;\leq\; \frac{(n+1)^2}{2}$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ -21 & -13 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $v_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$ $v_2 = \boxed{}$

b) Berechnen Sie die Diagonalgestalt von A.

$\Delta_A = \boxed{}$

c) Geben Sie die Transformationsmatrix T der Ähnlichkeitstransformation $T^{-1}AT = \Delta_A$ an.

$T = \boxed{}$

Aufgabe 3 (14 Punkte)

a) $v_1, \ldots, v_n$ seien Vektoren in einem reellen Vektorraum V. Formulieren Sie die Definition für die lineare Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$.

b) Vervollständigen Sie die folgende Aussage so, dass auf der rechten Seite keine Klammern stehen.

$\neg(A \vee B) =$

c) (a_n), $n \in \mathbb{N}$, sei eine Folge reeller Zahlen. Wie lautet die Definition der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a_0?

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion. Gegeben seien $a < b$. Vervollständigen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

$f(b) - f(a) =$

e) $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen. Vervollständigen Sie die Regel der partiellen Integration.

$\int\limits_a^b g'(x)f(x)dx =$

f) Gegeben sei die additive Gruppe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ der Restklassen modulo 8. Bestimmen Sie die kleinste Untergruppe, die die Elemente [2] und [4] enthält.

g) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei eine lineare Abbildung. Ergänzen Sie zur Dimensionsformel.

$\dim(\operatorname{im} f) =$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) Zeige Sie, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen (vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

b) Geben Sie die Transformationsmatrizen für die Transformation in die Standardbasis an:

$T = \boxed{}$ $\qquad T^{-1} = \boxed{}$

c) Gegeben Sei die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad b_1 \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b_2 \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ist L eindeutig bestimmt (begründen Sie)?

d) Bestimmen Bild und Kern von L (Darstellung bezüglich der Standardbasis).

$\operatorname{im} L = \boxed{}$ $\qquad \ker L = \boxed{}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\, dx$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

Aufgabe 6 (8 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto x^2y^2 + y^3 - y.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

grad $f = \boxed{}$; $Hf = \boxed{}$

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (relatives Maximum, relatives Minimum, Sattelpunkt).

Aufgabe 7 (8 Punkte) Gegeben sei die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' + \sin(x)y = x\,\mathrm{e}^{\cos(x)}\,.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie den Genzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(1-x)^2}$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

Aufgabe 9 (3 Punkte) Untersuchen Sie die nachstehende Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\, x^n$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)