Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Teufel, Dr. N. Röhrl, J. Spreer

Musterlösung für Klausur 2

Aufgabe 1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k \leq \frac{(n+1)^2}{2}$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

Wir verwenden Induktion über n.
Induktionsanfang. Für $n = 0$ ist $0 \leq \frac{1}{2}$.
Induktionsschritt. Sei die Ungleichung für $n-1$ vorausgesetzt und zeigen wir sie für n. Es wird

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n \\ &\leq \frac{((n-1)+1)^2}{2} + n \\ &= \frac{(n^2+2n)}{2} \\ &\leq \frac{(n+1)^2}{2}\,, \end{aligned}$$

unter Verwendung der binomischen Formel für $(n+1)^2$.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ -21 & -13 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

$$\lambda_1 = 2; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Diagonalgestalt von A.

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie die Transformationsmatrix T der Ähnlichkeitstransformation $T^{-1}AT = \Delta_A$ an.

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (14 Punkte)

a) $v_1, \ldots, v_n$ seien Vektoren in einem reellen Vektorraum V. Formulieren Sie die Definition für die lineare Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$.

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

b) Vervollständigen Sie die folgende Aussage so, dass auf der rechten Seite keine Klammern stehen.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

c) (a_n), $n \in \mathbb{N}$, sei eine Folge reeller Zahlen. Wie lautet die Definition der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a_0?

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n(\epsilon): \quad |a_0 - a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n(\epsilon)$$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion. Gegeben seien $a < b$. Vervollständigen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a); \quad \xi \in (a, b)$$

e) $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen. Vervollständigen Sie die Regel der partiellen Integration.

$$\int_a^b g'(x)f(x)dx = [g(x)f(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

f) Gegeben sei die additive Gruppe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ der Restklassen modulo 8. Bestimmen Sie die kleinste Untergruppe, die die Elemente [2] und [4] enthält.

Die Untergruppe besteht aus allen geraden Restklassen, also

$$U = \{[0], [2], [4], [6]\}.$$

g) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei eine lineare Abbildung. Ergänzen Sie zur Dimensionsformel.

$$\dim(\operatorname{im} f) = n - \dim(\ker f)$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) Zeige Sie, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen (vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

Zu zeigen ist, dass

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&2&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) Geben Sie die Transformationsmatrizen für die Transformation in die Standardbasis an:

$$T = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&2&1\end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

c) Gegeben Sei die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad b_1 \mapsto \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}; \quad b_2 \mapsto \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}; \quad b_3 \mapsto \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Ist L eindeutig bestimmt (begründen Sie)?

Da (b_1, b_2, b_3) eine Basis ist, ist L mit Angabe der Bilder der Basis bereits eindeutig bestimmt.

d) Bestimmen Sie Bild und Kern von L (Darstellung bezüglich der Standardbasis).

$$\operatorname{im} L = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right); \quad \ker L = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x)\, dx\,.$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)

Mit partieller Integration für den Ansatz $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2$ erhält man $f(x) = -\cos(x)$

und $g'(x) = 2x$ und somit ist:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \sin(x)\, dx &= \Big[-x^2\cos(x)\Big]_{x=0}^{\pi} + 2\int_0^\pi x\cos(x)\, dx \\
&= \Big[-x^2\cos(x)\Big]_{x=0}^{\pi} + 2\Big[x\sin(x)\Big]_{x=0}^{\pi} - 2\int_0^\pi \sin(x)\, dx \\
&= \Big[-x^2\cos(x)\Big]_{x=0}^{\pi} + 2\Big[x\sin(x)\Big]_{x=0}^{\pi} + 2\Big[\cos(x)\Big]_{x=0}^{\pi} \\
&= \pi^2 - 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (8 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto x^2y^2 + y^3 - y.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y + 3y^2 - 1 \end{pmatrix}; \quad Hf = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 6y \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

$$P_{1/2} = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$$

c) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (relatives Maximum, relatives Minimum, Sattelpunkt).

P_1: relatives Minimum

P_2: Sattelpunkt

Aufgabe 7 (8 Punkte) Gegeben sei die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' + \sin(x)y = x\, \mathrm{e}^{\cos(x)}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}
y' &= -\sin(x)y \\
\frac{dy}{dx} &= -\sin(x)y \\
\frac{dy}{y} &= -\sin(x)dx \\
\int \frac{1}{y}dy &= \int -\sin(x)dx \\
\ln|y| &= \cos(x) + \tilde{c} \\
y_h &= c\,\mathrm{e}^{\cos(x)}
\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\,\mathrm{e}^{\cos(x)} \quad \text{Variation der Konstanten} \\
c'(x) &= x\,\mathrm{e}^{\cos(x)}\,\mathrm{e}^{-\cos(x)} = x \\
c(x) &= \int_0^x t dt \\
c(x) &= [\frac{1}{2}t^2]_0^x \\
c(x) &= \frac{1}{2}x^2 \\
y_p(x) &= \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{\cos(x)}
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 2$.

$$\begin{aligned}
y &= y_p + y_h \\
y(x) &= \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{\cos(x)} + c\,\mathrm{e}^{\cos(x)} \\
y(0) &= 0 + c\,\mathrm{e} \\
y(0) &= c\,\mathrm{e} = 1 \\
c &= \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (5 **Punkte)** Berechnen Sie den Genzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(1-x)^2}$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(1-x)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{-2x(1-x)} = \infty$$

Aufgabe 9 (3 **Punkte)** Untersuchen Sie die nachstehende Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\,x^n$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\,x^n$$

Betrachte die Reihe mit dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\,x^{n+1}}{\frac{n(n+1)}{2}\,x^n}\right| = \frac{n+2}{n}\mid x \mid \to \mid x \mid$$

1. Fall: $|x| > 1$

Die Quotientenfolge konvergiert gegen $|x| > 1$, d.h nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe divergent.

2. Fall: $|x| < 1$

$\Longrightarrow$ Absolut konvergente Reihe.

3. Fall: $|x| = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}(-1)^n$ sind divergent, da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden.