Scheinklausur zur Numerischen Linearen Algebra

Zugelassene Hilfsmittel: 5 eigenhändig beschriebene Blätter DIN A4
Bearbeitungszeit: 90 min.

Zu bearbeiten sind fünf der sechs Aufgaben. Bitte geben Sie nur Lösungen zu fünf Aufgaben ab. Werden zu allen sechs Aufgaben Lösungen abgegeben, wird die Lösung zur Aufgabe 6 nicht gewertet.

Alle wesentlichen Zwischenschritte sind stichwortartig anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses allein genügt nur bei Aufgabe eins.

Beschreiben Sie alle Blätter nur einseitig und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt !

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert nur, wenn alle Eigenwerte von A reell sind.

2. Eine Householder-Transformation vergrößert die Absolutbeträge der Matrix-Einträge nicht.

3. Das Jacobi-Verfahren konvergiert für alle symmetrischen Matrizen A bei beliebigem Startwert.

4. Ein lineares Programm besitzt höchstens endlich viele Lösungen.

5. Die Normalengleichungen sind für jede Matrix lösbar.

6. Bei der Subtraktion von Gleitpunktzahlen werden die relativen Fehler nicht verstärkt.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

in faktorisierter Form, $A = \sum_{k=1}^{\mathrm{Rang}\, A} u_k \sigma_k v_k^{\mathrm{t}}$, sowie deren Pseudoinverse.

Aufgabe 3 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

```
function [a,b]=chol_tri(c,d),
```

das die Cholesky-Faktorisierung

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & 0 \\ c_1 & d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & c_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$$

einer positiv definiten symmetrischen Tridiagonalmatrix berechnet.

Drücken Sie dazu zunächst d_k und c_k durch a_j und b_j aus.

(Die Vektoren a, b, c, d enthalten die von Null verschiedenen Elemente der Matrizen.)

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einen Schritt $x \to y$ der Gauß-Seidel-Iteration mit Startwert $x = (2, 2)^{\mathrm{t}}$ durch. Bestimmen Sie die Iterationsmatrix Q sowie deren Spektralradius.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die (einzige) zulässige Basislösung und die zulässige Menge D des linearen Programms

$$(0, \gamma, 1)x \to \min\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0\,.$$

Für welche Werte des Parameters $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen x und wie lauten diese?

Aufgabe 6

Anullieren Sie durch eine Householder-Transformation der letzten beiden Zeilen das Element $a_{3,1}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die 2×2-Transformationsmatrix Q an. Erzeugen Sie dann durch eine weitere Householder-Transformation die Hessenbergform von A.