Prof. Dr. Klaus Höllig 20. Juli 2010

Scheinklausur zur Numerischen Linearen Algebra

Lösungen

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert nur, wenn alle Eigenwerte von A reell sind.

2. Eine Householder-Transformation vergrößert die Absolutbeträge der Matrix-Einträge nicht.

3. Das Jacobi-Verfahren konvergiert für alle symmetrischen Matrizen A bei beliebigem Startwert.

4. Ein lineares Programm besitzt höchstens endlich viele Lösungen.

5. Die Normalengleichungen sind für jede Matrix lösbar.

6. Bei der Subtraktion von Gleitpunktzahlen werden die relativen Fehler nicht verstärkt.

Lösung

1. falsch, es genügt, wenn es einen betragsmäßig größten Eigenwert gibt.

2. falsch, der Betrag des ersten Eintrags wird zur Norm der Spalte und diese ist i.A. größer als ein Eintrag.

3. falsch, wird nur Symmetrie verlangt, ist es sogar möglich, dass das Verfahren nicht durchführbar ist (Null-Diagonale).

4. falsch, die Lösungsmenge kann z.B. ein Geradenstück sein, das unendlich viele Punkte hat.

5. richtig, da das Bild der Matrix ein Unterraum ist, ist die Projektion immer möglich.

6. falsch, wegen Auschlöschung signifikanter Stellen bei annähernd gleich großen Zahlen.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

in faktorisierter Form, $A = \sum_{k=1}^{\mathrm{Rang}\,A} u_k \sigma_k v_k^{\mathrm{t}}$, sowie deren Pseudoinverse.

Lösung

$A^{\mathrm{t}} A = \mathrm{diag}(4,\, 2) \rightsquigarrow \sigma_1 = 2,\, \sigma_2 = \sqrt{2}$ und $v_1^{\mathrm{t}} = (1,\, 0),\, v_2^{\mathrm{t}} = (0,\, 1)$

Multiplikation von A mit $v_k \rightsquigarrow$

$$u_1 = Av_1/\sigma_1 = (1,\, 1,\, 1,\, 1)^{\mathrm{t}}/2, \quad u_2 = Av_2/\sigma_2 = (1,\, 0,\, 0,\, -1)^{\mathrm{t}}/\sqrt{2}$$

Pseudoinverse

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} v_k \sigma_k^{-1} u_k^{\mathrm{t}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1,\, 1,\, 1,\, 1)^{\mathrm{t}}/4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\, 0,\, 0,\, -1)^{\mathrm{t}}/2 \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$\texttt{function [a,b]=chol\_tri(c,d)}\,,$$

das die Cholesky-Faktorisierung

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & 0 \\ c_1 & d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & c_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$$

einer positiv definiten symmetrischen Tridiagonalmatrix berechnet.

Drücken Sie dazu zunächst d_k und c_k durch a_j und b_j aus.

(Die Vektoren a, b, c, d enthalten die von Null verschiedenen Elemente der Matrizen.)

Lösung

Multiplikation von R^{t} und R ergibt

$$d_1 = a_1^2\,, \quad d_k = a_k^2 + b_{k-1}^2 \; (k = 2, ..., n)\,, \quad c_k = a_k b_k \; (k = 1, ..., n-1)\,.$$

Dies führt auf folgendes Programm

```
function [a,b]=chol_tri(c,d)

a(1)=sqrt(d(1));
for k=1:length(c)
  b(k)=c(k)/a(k);
  a(k+1)=sqrt(d(k+1)-b(k)^2);
end
```

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einen Schritt $x \to y$ der Gauß-Seidel-Iteration mit Startwert $x = (2, 2)^{\mathrm{t}}$ durch. Bestimmen Sie die Iterationsmatrix Q sowie deren Spektralradius.

Lösung

Allgemein gilt

$$Dy = b - Ly - Rx\,, \quad A = L + D + R\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= (4 - 1 \cdot 2)/3 = 2/3 \\ y_2 &= (0 - 1 \cdot 2/3)/2 = -1/3\,. \end{aligned}$$

Die Iterationsmatrix ist

$$\begin{aligned} Q &= -(D + L)^{-1} R = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und $\varrho = 1/6$.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die (einzige) zulässige Basislösung und die zulässige Menge D des linearen Programms

$$(0,\gamma,1)x \to \min\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0\,.$$

Für welche Werte des Parameters $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen x und wie lauten diese?

Lösung

Die einzige zulässige Basislösung ist $x = (9,2,0)^{\mathrm{t}}$.

Da

$$\text{Kern}\, A = \text{span}\{\underbrace{(2,1,3/4)^{\mathrm{t}}}_{v^{\mathrm{t}}}\}$$

ist

$$D = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0\,.$$

Für $\gamma = -3/4$ ist $c^{\mathrm{t}}v = 0$ also ist dann jedes $x \in D$ Lösung.

Für $\gamma > -3/4$ ist $c^{\mathrm{t}}v > 0$, also existiert eine minimale Lösung ($t = 0\,,\ x = (9,2,0)^{\mathrm{t}}$).

Für $\gamma < -3/4$ ist $c^{\mathrm{t}}v < 0$. Die Zielfunktion ist auf D unbeschränkt und daher existert kein Minimum.

Aufgabe 6

Anullieren Sie durch eine Householder-Transformation der letzten beiden Zeilen das Element $a_{3,1}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die 2×2-Transformationsmatrix Q an. Erzeugen Sie dann durch eine weitere Householder-Transformation die Hessenbergform von A.

Lösung Householder-Parameter

$$\sigma = 1, \quad \|c\|_2 = 5, \quad d = (8,\, 4)^{\mathrm{t}}, \quad r = 40$$

sukzessive Durchführung der Transformation

$$d^{\mathrm{t}} A(2:3,:)/r = (1,\, 1,\, 1/2), \quad A(2:3,:) - \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrix

$$Q = E - dd^{\mathrm{t}}/r = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

zweite Transformation ($Q = Q^{\mathrm{t}}$)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow H = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

zweite Transformation ohne Rechnung:
Erhaltung der Symmetrie $\rightsquigarrow$ Zeile 1: $(0,\, -5,\, 0)$
$Q(-3,\, -4)^{\mathrm{t}} = -Q(3,\, 4)^{\mathrm{t}} \rightsquigarrow$ Zeile 2: $(-5,\, 5,\, 0)$
Symmetrie sowie Erhaltung der Spur $\rightsquigarrow$ Zeile 3: $(0,\, 0,\, 5)$