Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 11.08.2009, 09.00 – 12.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle 12 gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten, des Betrages, des Skalarproduktes und des Vektorproduktes z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 50 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 45 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File "allginfo.pdf" im Verzeichnis "`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_SS09/`".

c) Einige Werte trigonometrischer Funktionen:
$\sin(k\pi) = 0,\ \cos(k\pi) = (-1)^k,\ \sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ und $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2},\ \sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2,\ \sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$.

Aufgabe 1 **5 Punkte**

Bei einem Ratensparvertrag wird ein nomineller Jahreszinssatz von 4.8% vereinbart.

a) Es werden vom 1. Januar 2010 bis zum 1. Oktober 2015 am 1. Januar, 1. April, 1. Juli und 1. Oktober jeden Jahres jeweils 300 Euro eingezahlt. Über welchen Betrag kann am 31.12.2015 verfügt werden, wenn die Zinsen am Ende jeden Vierteljahres gutgeschrieben werden?

b) Statt der vierteljährlichen Einzahlung und Zinsgutschrift soll am Anfang jeden Jahres ein fester Betrag E vom 1. Januar 2010 bis zum 1. Januar 2015 bei jährlicher Zinsgutschrift eingezahlt werden. Wie groß muss E sein, damit am 31.12.2015 über einen Betrag von 8000 Euro verfügt werden kann?

Aufgabe 2 **4 Punkte**

In eine Anlage, die zwei Jahre lang betrieben wird, werden 26100 Euro am Anfang des ersten Jahres investiert. Im ersten Betriebsjahr wird ein Einzahlungsüberschuss in Höhe von 20 000 Euro erzielt, im zweiten ein Einzahlungsüberschuss in Höhe von 10 000 Euro, die jeweils am Jahresende dem Betrieb zufließen. Wie hoch ist der interne Zinssatz (d.h. der Zinsatz unter dem ein Kreditszinssatz unbedingt bleiben muss)?
Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $\sqrt{14.44}/2 = \sqrt{3.61} = 1.90$, $1/1.11 = 0.90$.

Aufgabe 3 **11 Punkte**

a) Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{-5n^5 + 14n^4 + 10}{15n^4 + 10n}, \quad b_n := \sqrt{2n^8 + 11n^4} - \sqrt{2n^8 + n^4}.$$

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^6 + x^2}{-5x^6 - x^2}, \quad \lim_{x\to(-2)} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x\to 2-} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$$

– bitte wenden –

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Vorgegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 4x^2 - 12x + 12.$$

Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion …

a) …monoton wachsend ist, und die Intervalle, in denen sie monoton fallend ist.

b) …konvex (Linkskrümmung) ist, und die Intervalle, in denen sie konkav (Rechtskrümmung) ist.

(Dabei soll in jedem Aufgabenteil jedes $x \in \mathbb{R}$ zu mindestens einem der Intervalle gehören.) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, alle Stellen, an denen $f(x)$ ein (relatives) Maximum besitzt, alle Stellen, an denen $f(x)$ ein (relatives) Minimum besitzt, und alle Wendestellen.

Verwendbares **Rechenergebnis**(zur Vereinfachung der Zahlenrechnung): $\sqrt{196} = 14$

Aufgabe 5 **11 Punkte**

a) Bestimmen Sie den (endlichen und positiven) Flächeninhalt zwischen den Kurven zu $f(x) := x^3 - 18x$ und $g(x) := 3x^2$.

b) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int_1^2 6x^5 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^{2\pi} 3x^2 \cdot \sin(x^3)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 6 **4 Punkte**

Bestimme Sie den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -10 & -9 \\ 3 & -9 & -7 & -2 \\ 4 & -4 & -15 & -13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 **5 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wobei auch ∞ als Grenzwert zugelassen ist):

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{1-\tan x}{\sin x - \cos x}, \qquad \lim_{x\to 0+} x \cdot \ln\left((\sin x)^2\right).$$

Aufgabe 8 **5 Punkte**

Die Abhängigkeit der Nachfrage von Ware A vom Preis $p\,(>0)$ sei durch $N_A(p) := 20\,p^{-0.1}$ und die von Ware B durch $N_B(p) := 12 - 4\,p$ beschrieben. In welchem Preisintervall sind beide

Nachfragen positiv? In welchem Teilintervall davon reagiert die Nachfrage nach A stärker auf Preisänderungen als die Nachfrage nach B?

Aufgabe 9 **11 Punkte**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) := 2x^2y + 2x^2 + 4y^2$ auf relative Extrema einschließlich der Klärung, ob es sich um ein relatives Maximum oder Minimum handelt.

Aufgabe 10 **14 Punkte**

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

a)

$$y'(x) = \left(1 + (y(x))^2\right)(3x^2), \quad y(1) = 1.$$

b)

$$y''(x) - 4y(x) = -24x^2 + 20x - 28, \quad y(0) = 14,\ y'(0) = -9.$$

Aufgabe 11 **10 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differenzengleichung:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = (-7) \cdot 3^n\,.$$

Aufgabe 12 **8 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Ebene E, die durch die Punkte $A(2, 4, 2)$, $B(1, 2, 1)$ und $C(2, 1, 3)$ geht, und zwar sowohl in Parameterdarstellung als auch in Gleichungsdarstellung.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(5, -1, 2)$ von der in **a)** bestimmte Ebene E.