Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 08.01.2010, 14.00 – 17.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle 12 gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten, des Betrages, des Skalarproduktes und des Vektorproduktes z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 50 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 45 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File "allginfo.pdf" im Verzeichnis "`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_SS09/`".

c) Einige Werte trigonometrischer Funktionen:
$\sin(k\pi) = 0,\ \cos(k\pi) = (-1)^k,\ \sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ und $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2},\ \sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2,\ \sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$.

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Ein Betrieb stellt auf vier Anlagen A, B, C, D zwei Produkte P, R her, wobei jedes der beiden Produkte alle vier Anlagen durchlaufen muss, aber die Produktionsreihenfolge beliebig ist. Die Bearbeitungszeiten pro kg sind:

Anlage	Bearbeitungszeit in Stunden für Produkt	
	P	R
A	5	12
B	11	18
C	6	8
D	11	6.5

Wöchentlich kann Anlage A höchstens 60 Stunden, Anlage B höchstens 99 Stunden, Anlage C höchstens 48 Stunden und Anlage D höchstens 71.5 Stunden benutzt werden. Der Gewinn pro kg beträgt bei P 40 Euro und bei R 40 Euro. Wieviel kg von P und wieviel kg von R müssen hergestellt werden, um einen möglichst großen Gesamtgewinn zu erzielen? Es genügt eine graphisch ermittelte Lösung im Rahmen der verfügbaren Zeichen– und Ablesegenauigkeit.

Hinweise: i) Für die graphische Lösung steht Ihnen ein Millimeterpapierblatt zur Verfügung (Es kann aber auch anderes z.B. kariertes Papier benutzt werden). Bei Bedarf kann ein zweites zur Verfügung gestellt werden.
ii) Als "Mustergerade" für die Geraden konstanten Gesamtgewinns ist die Gerade für den Gesamtgewinn von 160 Euro günstig.
iii) Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $6.5 \cdot 11 = 71.5$,

Aufgabe 2 **5 Punkte**

Bei einem Ratensparvertrag wird ein nomineller Jahreszinssatz von 3.2% vereinbart.

a) Es werden von 2011 bis 2028 am Anfang jeden Jahres jeweils 1000 Euro eingezahlt. Über welchen Betrag kann am 31.12.2028 verfügt werden, wenn die Zinsen am Ende jeden Jahres gutgeschrieben werden?

b) Statt der jährlichen Einzahlung und Zinsgutschrift soll am Anfang jeden Vierteljahres ein fester Betrag E vom 1. Januar 2011 bis zum 1. Oktober 2028 bei vierteljährlicher Zinsgutschrift eingezahlt werden. Wie groß muss E sein, damit am 31.12.2028 über einen Betrag von 26000 Euro verfügt werden kann?

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Ein Kredit in Höhe von 20 000 Euro wird am 01. Januar 2011 ausgezahlt, Jahreszinssatz: 11%. Vom 31.12.2011 bis zum 31.12.2018 wird am Ende jeden Jahres ein Betrag von 3700 Euro zurückgezahlt. Welcher Betrag muss am 31.12.2019 zurückgezahlt werden, damit die Schuld zu diesem Zeitpunkt vollständig getilgt ist?

Aufgabe 4 **5 Punkte**

Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{6n^6 + 12n^3 - 5}{-3n^4 + 6n^2}, \quad b_n := \sqrt{3n^{10} + n^6} - \sqrt{3n^{10} - n^6}.$$

Aufgabe 5 **8 Punkte**

a) Vorgegeben sei die Funktion $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$.

Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion monoton wachsend ist, und die Intervalle, in denen sie monoton fallend ist. (Dabei soll jedes $x \in \mathbb{R}$ zu mindestens einem der Intervalle gehören.)

b) Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion

$$g(x) := \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

auf dem Intervall $[0,\ 10]$.

Aufgabe 6 **11 Punkte**

a) Bestimmen Sie den (endlichen und positiven) Flächeninhalt zwischen den Kurven zu $f(x) := x^3 - x$ und $g(x) := 4x^2 - 4$.

b) Bestimmen Sie folgende Integrale: $\displaystyle\int_0^{2\pi} 5x^4 \cdot \cos(x^5)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^{\pi} (x+3) \cdot \cos x\,\mathrm{d}x\,.$

Aufgabe 7 **6 Punkte**

Prüfen Sie, ob die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Inverse A^{-1}.

Aufgabe 8 **6 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sin(x\cdot\pi/2)}{(x-1)^2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1+} (x-1)\cdot \ln(e^x - e).$$

Aufgabe 9 **12 Punkte**

Bestimmen Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion

$f(x,y) := x + \dfrac{y^2}{6} + 1$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) := x^2 + y^2 - 25 \stackrel{!}{=} 0.$

Aufgabe 10 **14 Punkte**

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

a)

$$y'(x) = (y(x))^4 \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 1.$$

b)

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 10\cdot\cos x, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -5.$$

Hinweis zu **b)**: Es ist vorteilhaft, komplexe Fundamentallösungen zu verwenden.

Aufgabe 11 **10 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differenzengleichung:

$$y_{n+2} - 3\cdot\sqrt{3}\, y_{n+1} + 9y_n = 18\cdot\left(\sqrt{3}\right)^n .$$

Aufgabe 12 **7 Punkte**

Vorgegeben seien die Ebenen $E_1 : -x_1 + 3x_2 - 4\,x_3 \;=\; 4$

und $E_2 : 2x_2 + 4\,x_3 \;=\; 4\,.$

a) Bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 .

b) Bestimmen Sie den Winkel α zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 .