Prof. Dr. Klaus Höllig 14. 10. 2010

Modulprüfung Grundlagen der Computermathematik

Zugelassene Hilfsmittel: 5 eigenhändig beschriebene Blätter DIN A4
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind fünf der sechs Aufgaben. Bitte geben Sie nur Lösungen zu fünf Aufgaben ab. Werden zu allen sechs Aufgaben Lösungen abgegeben, wird die Lösung zur Aufgabe 6 nicht gewertet.

Alle wesentlichen Zwischenschritte sind stichwortartig anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses allein genügt nur bei Aufgabe eins.

Beschreiben Sie alle Blätter nur einseitig und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt !

Wichtige Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass bei einigen Fachrichtungen zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis.

Informieren Sie sich bis spätestens 5. 11. 2010 über Ihr Prüfungsergebnis, das voraussichtlich ab 25. 10. 2010 bekannt gegeben wird, und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend im Sekretariat 8.162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung. Mit der Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtung an.

Aufgabe 1

Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

a) Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert, wenn die Beträge der Eigenwerte von A kleiner als 1 sind.

b) Die eine Householder-Transformation beschreibende Matrix ist symmetrisch.

c) Der Spektralradius der Iterationsmatrix Q des Gauß-Seidel Verfahrens ist für alle symmetrischen, positiv definiten Matrizen A kleiner als 1.

d) Ein lineares Programm mit beschränkter, nicht leerer zulässiger Menge besitzt mindestens eine Lösung.

e) Ein Ausgleichsproblem ist immer eindeutig lösbar.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

in faktorisierter Form, $A = \sum_{k=1}^{\mathrm{Rang}\, A} u_k \sigma_k v_k^{\mathrm{t}}$, sowie deren Pseudoinverse.

Aufgabe 3 Schreiben Sie ein Matlab-Programm `function x = solve(u,v,b)`, das ein lineares Gleichungssystem $R^t R x = b$ für eine nicht-singuläre obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & & 0 \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & v_{n-1} \\ 0 & & & u_n \end{pmatrix}$$

löst.

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

einen Schritt $u = (0,\, 0)^t \to v$ der Jacobi-Iteration durch. Bestimmen Sie die Iterationsmatrix und geben Sie die Maximum-Norm des Fehlers zur exakten Lösung $(1,\, 1)^t$ nach 10 Schritten an.

Aufgabe 5

Bringen Sie das Optimierungsproblem

$$x_1 - \alpha x_2 \to \min, \quad 2x_2 - 1 \le x_1 \le 3\,,\ x_k \ge 0$$

durch Einführung von zwei Schlupfvariablen x_3 und x_4 auf Standardform. Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen und das Minimum der Zielfunktion in Abhängigkeit von $\alpha > 0$.

Aufgabe 6 Transformieren Sie die 3×3-Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

durch eine Householdertransformation der letzten beiden Zeilen auf obere Dreiecksform und geben Sie die 2×2 Transformationsmatrix in der faktorisierten Form $E - \frac{1}{r} dd^t$ an. Bestimmen Sie ebenfalls die Lösung x des Ausgleichsproblems $e = \|Ax - b\|_2 \to \min$ und geben Sie auch den Fehler e an.