Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. M. Griesemer

Höhere Mathematik III — 07.09.2010

Prüfung (Nachtermin)

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, phys, mech

Vorname:	**Name:**
Matrikelnummer:	**Studiengang:**

Bitte beachten Sie unbedingt die folgenden **Hinweise:**

- Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 9** Aufgaben.
- In den **Aufgaben 1–4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den **Aufgaben 5–9** werden nur die Ergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästchen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig** !
- Zugelassene Hilfsmittel: **6 eigenhändig beschriebene Seiten im Format DIN A4** sind erlaubt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte Oktober auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden.
  Eine Ankündigung erfolgt auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen **viel Erfolg** !

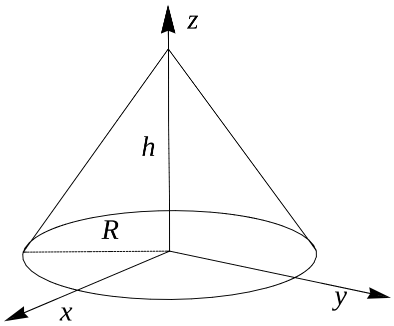
Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine ebenfalls Mitte Oktober auf der Homepage zu HM III bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Hinweis: Bei den Aufgaben auf dieser Seite sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Ergebnissen allein genügt nicht!

Aufgabe 1 (4 Punkte)



Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des abgebildeten Kreiskegels B mit Höhe h und Grundkreisradius R bezüglich der z-Achse. D.h. berechnen Sie

$$\int_B (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}V.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\gamma : [0,5] \to \mathbb{R}^3$, mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, -\sqrt{4t - t^2}, 0)^\top & , \text{ für } t \in [0,4] \\ (20 - 4t, 0, 0)^\top & , \text{ für } t \in (4,5]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x},$$

wobei

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -yz - 2x\sin(x^2 - y) \\ x^2 y + \sin(x^2 - y) \\ \cos(z^2) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Für jedes $\alpha \geq 0$ sei das Anfangswertproblem

$$u'' - 2\alpha u' + u = \alpha^2 \cos(x), \quad u(0) = \alpha^3 - \alpha,\ u'(0) = -\frac{\alpha^2}{2} \tag{1}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie abhängig von α die allgemeine reelle Lösung $u_{\alpha,h}$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, $u'' - 2\alpha u' + u = 0$.

b) Finden Sie sämtliche $\alpha \geq 0$, für die die Lösung des Anfangswertproblems (1) eine beschränkte Funktion ist, und geben Sie jeweils diese Lösung an.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Lage und Art sämtlicher Singularitäten der folgenden Funktionen sowie das jeweilige Residuum

a) $f_1(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{\cos(z)}{z^5} - \frac{1}{2z^3}$ b) $f_2(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}$

Hinweis: Bei allen nachfolgenden Aufgaben genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x, y, z) = \frac{1}{12}(2z^3 + xyz + x^2 + y^2 + z^2).$$

Weiter seien $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{e}| = 1\}$, $\mathbf{e} = (1, 0, 0)^\top$ und $\mathbf{n} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{e}\} \to \mathbb{R}^3$ der Normalenvektor auf S, mit

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{e}|}(\mathbf{x} - \mathbf{e}).$$

Berechnen Sie

$$\int_S \nabla f \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\sigma = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$xy' = xe^{-y/x} + y, \quad y(1) = 0.$$

$$y(x) = \boxed{}$$

b) Bestimmen Sie irgendeine nichttriviale Lösung $\mathbf{x}_p$ des Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie auch eine reelle Fundamentalmatrix $X(t)$ an.

$$\mathbf{x}_p(t) = \boxed{}$$

$$X(t) = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)
In dieser Aufgabe stehe u für die Heavisidefunktion.
Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $F(s)$ der Faltung

$$f(t) = (u(t)e^{-t}) * (\cos(1-t)u(t-1))$$

und berechnen Sie $f(t)$.

$F(s) =$

$f(t) =$

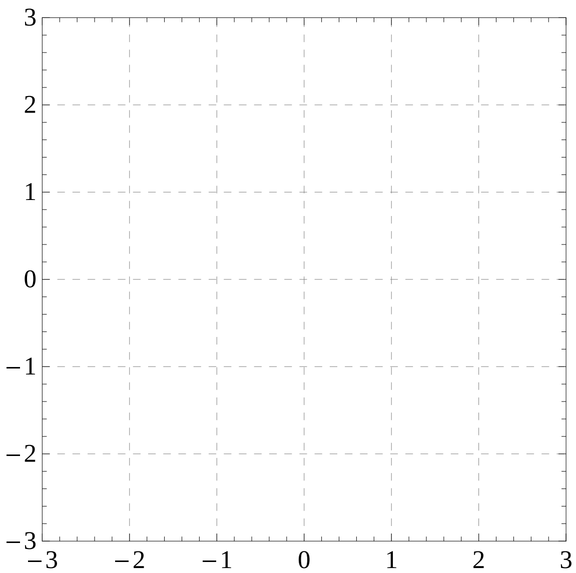
Aufgabe 8 (2 Punkte)
Gegeben seien die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, mit

$$f(z) = z(1-z),$$

und die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\}.$$

Skizzieren Sie $f(M)$.
In der Skizze ist $\operatorname{Re} z$ *nach rechts,* $\operatorname{Im} z$ *nach oben abzutragen.*



Aufgabe 9 (6 Punkte)
Gegeben sei die Abbildung f, mit

$$f(z) = \frac{3z-2}{z^2+3z-4}$$

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von f:

$f(z) =$ $\boxed{}$

Entwickeln Sie f um den Punkt i in eine Laurentreihe, welche im Punkt $z = -2$ konvergiert. Geben Sie Haupt- und Nebenteil dieser Reihe an:

Hauptteil: $\boxed{}$

Nebenteil: $\boxed{}$

Geben Sie das Konvergenzgebiet $G \subset \mathbb{C}$ dieser Reihe an:

$G =$ $\boxed{}$