# Lösungsvorschläge zur Klausur

**für mach, umw, fmt, bau, immo, tema, und zugehörige Technikpädagogik**

**Aufgabe 1:** *(10 Punkte)*
Gegeben ist die Parametrisierung $\Phi$ eines Flächenstücks $S$ durch

$$\Phi\colon [0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^3\colon (\varphi,\psi)\mapsto \big((\cos(\varphi)+2)\cos(\psi),(\cos(\varphi)+2)\sin(\psi),\sin(\varphi)\big).$$

Weiter ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$g\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon (x,y,z)\mapsto(z,0,0).$$

Bestimmen Sie $\iint_S (\operatorname{rot} g)\bullet n\,\mathrm{d}O$.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:**

**Variante 1: direkte Berechnung**

Es gilt

$$\operatorname{rot} g(x,y,z) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

und weiter

$$\Phi_\varphi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\cos(\psi)\\-\sin(\varphi)\sin(\psi)\\\cos(\varphi)\end{pmatrix} \qquad \Phi_\psi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix}-(\cos(\varphi)+2)\sin(\psi)\\(\cos(\varphi)+2)\cos(\psi)\\0\end{pmatrix}$$

$$n(\varphi,\psi) = \Phi_\varphi\times\Phi_\psi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix}-\cos(\varphi)(\cos(\varphi)+2)\cos(\psi)\\-\cos(\varphi)(\cos(\varphi)+2)\sin(\psi)\\-\sin(\varphi)(\cos(\varphi)+2)\end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iint_S(\operatorname{rot} g)\bullet n\,\mathrm{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{rot} g(\Phi(\varphi,\psi)))\bullet n(\varphi,\psi)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-\cos(\varphi)(\cos(\varphi)+2)\cos(\psi)\\-\cos(\varphi)(\cos(\varphi)+2)\sin(\psi)\\-\sin(\varphi)(\cos(\varphi)+2)\end{pmatrix}\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\varphi)(\cos(\varphi)+2)\sin(\psi)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\big[\cos(\varphi)(\cos(\varphi)+2)\cos(\psi)\big]_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{2\pi} -(\cos(\varphi))^2\,\mathrm{d}\varphi + \underbrace{\int_0^{2\pi} -2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}_{=0}\\
&= -\left[\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = -\pi
\end{aligned}$$

**Variante 2: Mit dem Satz von Stokes**

Mit Hilfe des Satzes von Stokes kann die Flächenintegration durch die Integration über die Randkurve ersetzt werden

$$\iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \,\mathrm{d}O = \int_{\Phi(K)} g(s) \bullet \mathrm{d}s,$$

dabei ist $K$ die Randkurve des Parametergebiets $[0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]$. Es ergeben sich vier Teilkurven der Rankurve $K$, die wie folgt parametrisiert werden sollen

$$\begin{array}{ll}
K_1\colon & C_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (t,0) \\
K_2\colon & C_2\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (2\pi,t) \\
K_3\colon & C_3\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (2\pi - t,\frac{\pi}{2}) \\
K_4\colon & C_4\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (0,\frac{\pi}{2} - t)
\end{array}$$

mit den zugehörigen Kurven im Raum

$$\begin{array}{l}
\Phi(C_1)\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big((\cos(t)+2),0,\sin(t)\big) \\
\Phi(C_2)\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(3\cos(t),3\sin(t),0\big) \\
\Phi(C_3)\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(0,(\cos(2\pi - t)+2),\sin(2\pi - t)\big) \\
\Phi(C_4)\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(3\cos(\frac{\pi}{2} - t),3\sin(\frac{\pi}{2} - t),0\big)
\end{array}$$

Man sieht dabei sofort, dass die Kurvenstücke $\Phi(K_2)$ und $\Phi(K_4)$ zusammenfallen und gegensinnig durchlaufen werden. Sie brauchen bei der weiteren Rechnung also nicht mehr beachtet werden. Außerdem ist

$$\begin{array}{l}
(\Phi \circ C_1)'(t) = \big(-\sin(t),0,\cos(t)\big) \\
(\Phi \circ C_3)'(t) = \big(0,\sin(-t),-\cos(-t)\big)
\end{array}$$

Damit kann das gesuchte Integral bestimmt werden

$$\begin{aligned}
\iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \,\mathrm{d}O &= \int_{\Phi(K)} g(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{\Phi(K_1)} g(s) \bullet \mathrm{d}s + \int_{\Phi(K_3)} g(s) \bullet \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{2\pi} g(\Phi(C_1(t))) \bullet (\Phi \circ C_1)'(t) \,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} g(\Phi(C_3(t))) \bullet (\Phi \circ C_3)'(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&\quad \underbrace{+ \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(2\pi - t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(-t) \\ -\cos(-t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t}_{=0} \\
&= \int_0^{2\pi} -(\sin(t))^2 \,\mathrm{d}t = -\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = -\pi
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2:** *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 8\cosh(x)$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**

## Teil 1: Berechnung der homogenen Lösung

Die Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom

$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

Da $t = 1$ ein doppelter Eigenwert ist, folgt

$$f_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

## Teil 2: Berechnung der inhomogenen Lösung

### Variante 1: Inhomogene Lösung nach Art der Rechten Seite

Wir betrachten nun den inhomogenen Teil

$$8\cosh(x) = 4e^x + 4e^{-x}$$

Wir lösen nach Art der rechten Seite, unter Verwendung des Superpositionsprinzips.
Bei $4e^x$ liegt ein Resonanzfall vor. Ansatz und Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f_1 &= ax^2 e^x \\ f_1' &= ae^x\left(x^2 + 2x\right) \\ f_1'' &= a\left(x^2 + 4x + 2\right) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} ae^x\left(x^2+4x+2\right) - 2ae^x\left(x^2+2x\right) + ax^2e^x &= 4e^x \\ 2a &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Also ist

$$f_1(x) = 2x^2 e^x$$

Bei $4e^x$ liegt keine Resonanz vor. Ansatz und Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f_2 &= be^{-x} \\ f_2' &= -be^{-x} \\ f_2'' &= be^{-x} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} be^{-x} + 2be^{-x} + b^{-x} &= 4e^{-x} \\ 4b &= 4 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Also ist

$$f_2(x) = e^{-x}$$

was

$$f_p(x) = f_1(x) + f_2(x) = 2x^2 e^x + e^{-x}$$

und

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2x^2 e^x + e^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ergibt.

**Variante 2: Inhomogene Lösung mit Variation der Konstanten**

Die Wronskimatrix lautet

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(x+1) \end{pmatrix}$$

Mit dieser Wronskimatrix erhalten wir mit dem Ansatz

$$M(x) \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

das Gleichungssystem

$$\left( \begin{array}{cc|c} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & e^x(x+1) & 4e^x + 4e^{-x} \end{array} \right)$$

dies lässt sich umformen zu

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4x - 4xe^{-2x} \\ 0 & 1 & 4 + 4e^{-2x} \end{array} \right)$$

Also ist

$$\begin{aligned} c_1 &= \int -4x - 4xe^{-2x} dx \\ c_2 &= \int 4 + 4e^{-2x} dx \end{aligned}$$

Man sieht direkt, dass

$$c_2 = \int 4 + 4e^{-2x} dx = \left[4x - 2e^{-2x}\right]$$

Partielle Integration ergibt

$$\int xe^{-2x} dx = \left[-\frac{x}{2} e^{-2x}\right] + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \left[e^{-2x} \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]$$

Damit ist

$$c_1 = -2x^2 + e^{-2x}(2x+1)$$

sowie

$$f_p(x) = 2x^2e^x + e^{-x}$$

und

$$f(x) = c_1e^x + c_2xe^x + 2x^2e^x + e^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

**Aufgabe 3:** *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \sinh(x)y = \sinh(x)$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:**

## Teil 1: Berechnung der homogenen Lösung

Mit Satz 3.2.2 aus der Vorlesung, wobei $g(x) = -\sinh(x)$ und $h(y) = \frac{1}{y}$ sind, erhalten wir

$$y_h = c \cdot e^{-\cosh(x)} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Alternativ können wir durch **formales** Umformen und Integrieren folgern, dass

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -\sinh(x)dx \\ \ln(y) &= -\cosh(x) + \tilde{c} \quad \text{mit } \tilde{c} \in \mathbb{R} \\ y &= c \cdot e^{-\cosh(x)} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

## Teil 2: Berechnung der inhomogenen Lösung

Mit Variation der Konstanten kommen wir auf den folgenden Ansatz

$$c(x) = \int e^{\cosh(x)} \sinh(x)dx$$

Wir substituieren $u = \cosh(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} c(x) &= \int e^{\cosh(x)} \sinh(x)dx \\ &= \int e^u du \\ &= \left[ e^{\cosh(x)} \right] \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$y_p = e^{\cosh(x)} \cdot e^{-\cosh(x)} = 1$$

Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{-\cosh(x)} + 1 \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

**Aufgabe 4:** *(8 Punkte)*
Gegeben ist die folgende $2\pi$-periodische Funktion $f$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-\pi, 0] \\ 2 & \text{für } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

**(a)** Entwickeln Sie $f$ in eine reelle Fourierreihe.

**(b)** Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:**

**(a)** Man erkennt leicht, zum Beispiel anhand einer Skizze, dass die Funktion $f$ weder gerade noch ungerade ist. Ihre Periode beträgt $2\pi$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2dx = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \\
a_j &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(jx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{j}\sin(jx)\right]_0^{\pi} = 0 \\
b_j &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(jx)dx = \left[\frac{-2}{j\pi}\cos(jx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{-2}{j\pi}(\cos(j\pi)-1) = \frac{-2}{j\pi}\left((-1)^j - 1\right) = \frac{2}{j\pi}\left((-1)^{j+1}+1\right)
\end{aligned}$$

wobei hier $j \in \mathbb{N}$. Als Fourierreihe erhalten wir

$$f(x) \sim 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j\pi}\left((-1)^{j+1}+1\right)\sin(jx)$$

**(b)** Die Funktion $f$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ stetig differenzierbar. Die Fourierreihe von $f$ konvergiert somit für alle Elemente dieser Menge gegen $f$.

Für alle $\{x = k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ konvergiert die Fourierreihe jeweils gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigen Grenzwerten an diesen Stellen. Dieser Mittelwert ist an allen diesen Stellen gleich 1.

**Aufgabe 5:** *(12 Punkte)*
Es ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie *die* reelle Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y(0) = (0,1,0) \; .$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:**

# Variante 1 mit minimalem Polynom

$$Ay(0) = (-1,2,0)^T \quad , \quad A^2y(0) = (-3,4,0)^T$$

Wir bestimmen das Polynom $\chi_A$, indem wir in der mit den berechneten Vektoren gebildeten Matrix eine Nullzeile erzeugen und die entsprechnden Operationen zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2Z1+Z2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3Z2+Z3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4Z1+Z3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$A^2v - 3(Av - 2v) - 4v = 0 \; .$$

Das annulierende Polynom lautet somit

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Setzen wir in $\chi_A$ den Differentialoperator $D$ ein, so ist $\chi_A$ charakteristisches Polynom zu der Differentialgleichung

$$\chi_A(D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 3y' + 2y = 0 \; .$$

Daraus folgt

$$\tilde{\chi}_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \; , \; \lambda_2 = 2$$

Das Fundamentalsystem von $\chi_A(D)y = 0$ wird somit von

$$g_1(x) = e^x \quad , \quad g_2(x) = e^{2x}$$

aufgespannt.

Wir bestimmen die zugehörige und an der Stelle $x = 0$ ausgewertete transponierte Wronski-Matrix $M(0)$, sowie die für den Lösungsalgorithmus benötigte Inverse $\left(M^T(0)\right)^{-1}$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(M^T(0)\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(M(0)\right)^T} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die gesuchte Lösung zu dem AWP:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^{2x} \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Variante 2 mit charakteristischem Polynom

$$Ay(0) = (-1,2,0)^T \quad , \quad A^2y(0) = (-3,4,0)^T$$

Das charakteristische Polynom von $A$ liest man direkt ab:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

Setzen wir in $\chi_A$ den Differentialoperator $D$ ein, so erhalten wir das Fundamentalsystem der dadurch induzierten DGL $\chi_A(D)y = 0$ duch die Nullstellen von $\chi_A$ :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$\Rightarrow g_1(x) = e^x \quad , \quad g_2(x) = e^{2x} \quad , \quad g_3(x) = xe^{2x}$$

Mit diesen Funktionen bilden wir die Wronski-Matrix:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & xe^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} & (4x+4)e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(M^T\right)^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir die Lösung

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^{2x} \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$$